

# Vorlesungsskript Grundlagen der dynamischen Systeme

PD Dr. Christoph Kawan  
Lehrstuhl für Dynamische Systeme  
Fakultät für Informatik und Mathematik  
Universität Passau  
94032 Passau

E-Mail: [christoph.kawan@uni-passau.de](mailto:christoph.kawan@uni-passau.de)

Datum: 05.02.2018

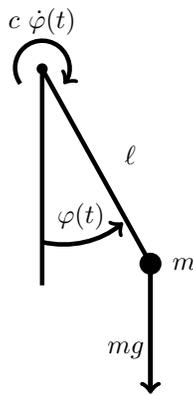
# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ein einführendes Beispiel: Das invertierte Pendel</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Lineare zeitinvariante Differentialgleichungen</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Stabilität linearer Differentialgleichungen</b>	<b>16</b>
<b>4</b>	<b>Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Lineare Kontrollsysteme</b>	<b>32</b>
5.1	Kontrollierbarkeit . . . . .	35
5.2	Feedback und Stabilisierung . . . . .	42
5.3	Steuerung mit minimaler Energie . . . . .	48
5.4	Beobachtbarkeit . . . . .	51
5.5	Asymptotische Beobachtbarkeit . . . . .	56
5.6	Dynamische Beobachter . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Stabilisierung nichtlinearer Kontrollsysteme</b>	<b>61</b>
<b>7</b>	<b>Realisierungstheorie</b>	<b>63</b>
7.1	Die Laplace-Transformation . . . . .	63
7.2	Anwendung der Laplace-Transformation auf lineare Differentialgleichungen . . . . .	70
7.3	Transferfunktionen . . . . .	71

# 1 Ein einführendes Beispiel: Das invertierte Pendel

Es geht in dieser Vorlesung um Regelungssysteme (auch Kontrollsysteme genannt). Um die allgemeine Theorie zu motivieren, beginnen wir mit einem Standardbeispiel, dem invertierten Pendel.

**Die Pendelgleichung.**



Wir verwenden folgende Notation:

- $l$ : Länge der Pendelstange
- $m$ : Masse des Pendels
- $g$ : Erdbeschleunigung
- $\varphi$ : Auslenkung des Pendels
- $c\dot{\varphi}$ : Reibungskraft

Wir gehen davon aus, dass die Pendelmasse am Ende einer starren Stange mit vernachlässigbarer Masse angebracht ist und in einem Punkt zentriert ist. Die Aufhängung des Pendels soll fixiert sein. Wir wollen uns im Folgenden aus Newton's Kraftgesetz die Bewegungsgleichung des Pendels herleiten. Dieses lautet

$$F = ma,$$

wobei  $F$  die wirkende Kraft ist und  $a$  die Beschleunigung. Die Kraft ist eine ortsabhängige Funktion und  $a$  ist die zweite zeitliche Ableitung des Orts, den wir mit  $x(t)$  bezeichnen. Die obige Identität können wir folglich schreiben als

$$F(x(t)) = m\ddot{x}(t), \quad \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t).$$

Den Ort der Pendelmasse können wir als Funktion des Auslenkungswinkels  $\varphi$  beschreiben:

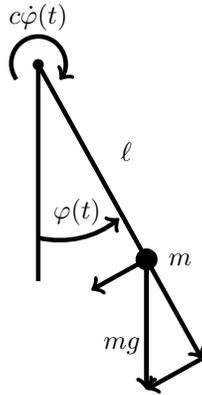
$$x(t) = \begin{bmatrix} l \sin \varphi(t) \\ -l \cos \varphi(t) \end{bmatrix}.$$

Die erste und zweite Ableitung nach der Zeit ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= l\dot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{bmatrix}, \\ \ddot{x}(t) &= l\ddot{\varphi}(t) \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{bmatrix} + l\dot{\varphi}(t)^2 \begin{bmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Auf die Pendelmasse wirken die Schwerkraft und die Reibungskraft. Dabei ist zu beachten, dass ein Teil der Schwerkraft durch die Pendelstange kompensiert wird. Mit Hilfe eines Kräfteparallelogramms erhalten wir die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \alpha(t) \cdot \begin{bmatrix} \sin \varphi(t) \\ -\cos \varphi(t) \end{bmatrix} + \beta(t) \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{bmatrix}.$$



Dies ist ein lineares Gleichungssystem, das wir auch schreiben können als

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \\ -\cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix}.$$

Durch Matrixinversion erhalten wir als Lösung

$$\begin{bmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi(t) & -\cos \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg \cos \varphi(t) \\ -mg \sin \varphi(t) \end{bmatrix},$$

wobei die zweite Komponente die effektiv auf die Pendelmasse wirkende Kraft beschreibt. Die Bewegungsgleichung ergibt sich damit zu

$$-mg \sin \varphi(t) = ml\ddot{\varphi}(t) + c\dot{\varphi}(t),$$

was wir lieber in der Form

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{g}{l} \sin \varphi(t) - c' \dot{\varphi}(t), \quad c' := \frac{c}{ml},$$

schreiben. Um ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu erhalten, führen wir neue Koordinaten ein, nämlich

$$x_1 := \varphi, \quad x_2 := \dot{\varphi}.$$

Wir erhalten so das Gleichungssystem

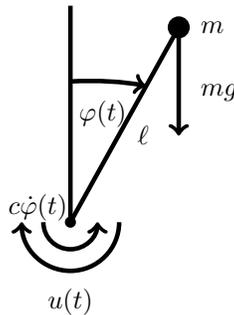
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \sin x_1 - c' x_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Dieses Differentialgleichungssystem hat eine Ruhelage im Nullpunkt (aber nicht nur dort!). Das ist klar, denn wenn die Auslenkung und die Winkelgeschwindigkeit Null sind, bewegt sich das Pendel nicht. Für kleine Abweichungen aus der Ruhelage wird die Bewegung in erster Näherung durch die Linearisierung beschrieben. Diese ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix auf der rechten Seite ist die Jacobi-Matrix der rechten Seite von (1) im Punkt  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

### Stabilisierung in der oberen Ruhelage.



Unser Ziel ist es nun, das Pendel in der oberen, instabilen Ruhelage zu stabilisieren, siehe Abbildung. Wir nehmen dazu an, dass wir mit einem Motor in der Aufhängung eine Kraft erzeugen können. Es ist dann praktisch, den Winkel als Abweichung von unserem Ziel anzugeben. Vorzeichen von Winkel und Reibungskraft kehren sich um und wir erhalten

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \sin \varphi - c' \dot{\varphi} + u(t),$$

wobei  $u(t)$  die Kraft beschreibt, die der Motor zur Zeit  $t$  auf die Pendelmasse ausübt.

Ansatz: Wir wählen eine sogenannte „PD“-Regelung<sup>1</sup>

$$u = \alpha\varphi + \beta\dot{\varphi},$$

d.h. die Steuerung wird in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand gewählt (*Rückkopplung / Feedback*).

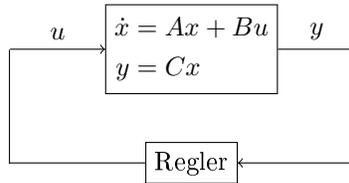


Abbildung 1: Blockdiagramm: Rückkopplung

Der geschlossene Regelkreis ist dann

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l} \sin \varphi + \alpha\varphi + (\beta - c')\dot{\varphi}.$$

Wir wollen nun  $\alpha$  und  $\beta$  so wählen, dass die Ruhelage  $(\varphi_*, \dot{\varphi}_*) := (0, 0)$  stabil wird. Das nichtlineare System ist gegeben durch

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 + \alpha x_1 + (\beta - c')x_2 \end{bmatrix}.$$

Die Linearisierung in der Ruhelage ist das lineare System

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} + \alpha & \beta - c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

In Ermangelung einer besseren Idee wählen wir  $\alpha$  und  $\beta$  so, dass die Linearisierung asymptotisch stabil ist, d.h. dass alle Lösungen gegen Null konvergieren. Damit das der Fall ist, müssen beide Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  negativen Realteil haben. Bei  $2 \times 2$ -Matrizen ist dies äquivalent dazu, dass die Spur negativ und die Determinante positiv ist, denn

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \Rightarrow \text{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \det(A) = \lambda_1 \lambda_2.$$

Wir erhalten deshalb die beiden Bedingungen

$$\beta < c' \quad \text{und} \quad \alpha < -\frac{g}{l}.$$

Physikalische Interpretation:

- $\beta < c'$ : In dem System ist Reibung enthalten, entweder real durch  $c'$  oder virtuell durch  $\beta$ .
- $\alpha < -g/l$ : Das Vorzeichen der Rückstellkraft wird umgekehrt.

<sup>1</sup>„PD“ steht für *proportional derivative*.

## 2 Lineare zeitinvariante Differentialgleichungen

Wir wollen lineare Kontrollsysteme verstehen, die durch Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

beschrieben werden. Dazu müssen wir zunächst lineare inhomogene Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = Ax + g(t) \tag{2}$$

verstehen, wobei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ,  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $g : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  eine auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  definierte stetige Funktion ist.

Um die Lösungen von (2) zu beschreiben, müssen wir zunächst die Matrix-Exponentialfunktion einführen und studieren. Wie die reelle oder komplexe Exponentialfunktion, definieren wir für eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ,

$$e^A = \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots,$$

wobei  $I$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Zunächst stellen wir sicher, dass dies für alle  $A$  wohldefiniert ist.

**2.1 Satz:** Die Reihe  $e^A$  konvergiert für alle  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .

**Beweis:** Wir verwenden das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Reihen. Sei dazu  $\|\cdot\|$  eine Operatornorm auf  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Für beliebige  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$ , gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} A^k \right\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} A^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k. \end{aligned}$$

Nun können wir verwenden, dass die reelle Exponentialreihe konvergiert. Wir wissen insbesondere, dass zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, so dass aus  $n, m \geq n_0$  folgt, dass obige Summe kleiner als  $\varepsilon$  ist. Damit ist die Konvergenz von  $e^A$  mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums nachgewiesen. Wir haben dabei in der letzten Abschätzung die *Submultiplikativität* von Operatornormen verwendet.<sup>2</sup>  $\square$

Die folgende Eigenschaft der Matrixexponentialfunktion zeigt ihre Bedeutung in Bezug auf die Differentialgleichung (2).

**2.2 Satz:** Für jedes  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ist die Funktion  $t \mapsto e^{tA}$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , stetig differenzierbar mit

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

<sup>2</sup>Für eine Operator- oder Matrixnorm  $\|\cdot\|$  gilt  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ , siehe Übungsaufgabe 2 auf Blatt 3.

**Beweis:** Sei  $(e^{At})_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$  und  $(A^k)_{ij} = \alpha_{ij}^{(k)}$ . Dann gilt

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \frac{t^k}{k!} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Die die Matrizenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$  für jedes  $t$  konvergiert, ist auch jede der komplexen Potenzreihen (3) auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, besitzt also den Konvergenzradius  $\infty$ . Folglich ist jede der Grenzfunktionen  $\varepsilon_{ij}$  auf ganz  $\mathbb{R}$  stetig differenzierbar und die Ableitung kann durch gliedweises Differenzieren der entsprechenden Reihenglieder gewonnen werden:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_{ij}^{(k)} \frac{t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k+1)} \frac{t^k}{k!}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= (\dot{\varepsilon}_{ij}(t)) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k+1)} \frac{t^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) A, \end{aligned}$$

und der Satz ist bewiesen. □

**2.3 Satz:** Die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n, \quad t_0 \in \mathbb{R}$$

ist gegeben durch  $\varphi(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0$ ,  $\varphi(\cdot; t_0, x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

**Beweis:** Nach dem vorherigen Satz gilt

$$\frac{d}{dt} \varphi(t; t_0, x_0) = A e^{A(t-t_0)} x_0 = A \varphi(t; t_0, x_0).$$

Da zudem  $\varphi(t_0; t_0, x_0) = e^0 x_0 = I x_0 = x_0$ , löst  $\varphi(\cdot; t_0, x_0)$  das Anfangswertproblem. Die Eindeutigkeit folgt z.B. aus dem Satz von Picard-Lindelöf. □

Nun können wir auch die Lösungen des inhomogenen Systems (2) beschreiben.

**2.4 Satz:** Die eindeutige maximale Lösung des Anfangswertproblems (2),  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$ ,  $t_0 \in I$ , ist gegeben durch<sup>3</sup>

$$\varphi(t; t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s) ds, \quad t \in I. \quad (4)$$

---

<sup>3</sup>Das Integral ist komponentenweise zu verstehen.

Wir nennen (4) die „*Variation der Konstanten*“-Formel (Begründung des Namens: siehe Übungsaufgabe 4 auf Blatt 1).

**Beweis:** Zunächst sehen wir, dass

$$\varphi(t_0; t_0, x_0) = e^0 x_0 + \int_{t_0}^{t_0} \dots = x_0.$$

Die Differenzierbarkeit von  $t \mapsto \varphi(t; t_0, x_0)$  folgt aus der von  $t \mapsto e^{At}$  und der Stetigkeit von  $g$  (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!). Aus der Identität

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-s)} g(s) ds = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} g(s) ds,$$

deren Gültigkeit aus  $e^{A(t-s)} = e^{At} e^{-As}$  (siehe Satz 2.7) folgt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(t; t_0, x_0) &= Ae^{A(t-t_0)} x_0 + Ae^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} g(s) ds + e^{At} e^{-At} g(t) \\ &= A\varphi(t; t_0, x_0) + g(t). \end{aligned}$$

Hier haben wir zudem verwendet, dass  $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$ , siehe Satz 2.7.  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, wie man  $e^{At}$  für Diagonalmatrizen berechnen kann.

**2.5 Beispiel:** Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen  $e^{At}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  berechnen. Die Potenzen von  $A$  sind gegeben durch

$$A^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

$\diamond$

Dass sich die Berechnung von  $e^{At}$  i.A. nicht auf die Berechnung reeller oder komplexer Exponentialausdrücke reduziert, zeigt folgendes Beispiel.

**2.6 Beispiel:** Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir wollen  $e^{At}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  berechnen. Dies ist in dem vorliegenden Fall sehr einfach, da  $A^3 = 0$  und damit auch  $A^k = 0$  für alle  $k \geq 3$ . Also bricht die Exponentialreihe bereits nach dem dritten Reihenglied ab und wir erhalten

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{t^0}{0!}A^0 + \frac{t^1}{1!}A^1 + \frac{t^2}{2!}A^2 = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

Es stellt sich nun die Frage nach der praktischen Berechnung von  $e^{At}$  im allgemeinen Fall. Dazu benötigen wir zunächst einige elementare Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion.

**2.7 Satz:** Für beliebige  $n \times n$ -Matrizen  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $t, s \in \mathbb{R}$  gelten folgende Aussagen:

- (a)  $e^0 = I$ .
- (b)  $e^{At}e^{As} = e^{A(t+s)}$ .
- (c)  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ .
- (d)  $e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ , falls  $AB = BA$ .
- (e)  $e^{At} = Te^{T^{-1}AT}T^{-1}$  für jede invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .
- (f) Besitzt  $A$  Blockdiagonalform  $\text{diag}[A_1, \dots, A_r]$ , so gilt

$$e^{\text{diag}[A_1, \dots, A_r]t} = \text{diag}[e^{A_1 t}, \dots, e^{A_r t}].$$

**Beweis:** Eigenschaft (a) ergibt sich durch Einsetzen der Nullmatrix in die Exponentialreihe. Eigenschaft (b) ergibt sich als Spezialfall von (d), da  $At$  und  $As$  für beliebige  $t, s \in \mathbb{R}$  kommutieren; (c) erhält man aus

$$\frac{d}{dt}e^{-At}e^{At} = -Ae^{-At}e^{At} + e^{-At}Ae^{At} = 0, \quad e^{-A0}e^{A0} = I$$

und der Tatsache, dass eine auf einem Intervall definierte differenzierbare Funktion mit verschwindender Ableitung konstant ist.

Eigenschaft (d) ergibt sich wie folgt: Wegen  $AB = BA$  gilt  $A^k B = BA^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit

$$e^{At}B = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right] B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [A^k B] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [BA^k] = B e^{At}.$$

Mit Satz 2.2 und der Produktregel folgt für die Funktion  $M(t) := e^{At}e^{Bt}$ , dass

$$\dot{M}(t) = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A + B)M(t).$$

Ferner gilt  $M(0) = I$ . Also löst  $M$  wie auch die Funktion  $t \mapsto e^{(A+B)t}$  das Anfangswertproblem

$$\dot{X} = (A + B)X, \quad X(0) = I.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung (Satz von Picard-Lindelöf) folgt daraus die Behauptung.

(e) Für die matrixwertige Funktion  $P(t) := Te^{T^{-1}At}T^{-1}$  gilt

$$\dot{P}(t) = T \left[ \frac{d}{dt} e^{T^{-1}At} \right] T^{-1} = T [T^{-1}A T e^{T^{-1}At}] T^{-1} = AP(t).$$

Da auch  $P(0) = I$  gilt, ergibt sich mit der gleichen Schlussweise wie in (d) die Behauptung.

(f) Für die matrixwertige Funktion  $Q(t) := \text{diag}[e^{A_1 t}, \dots, e^{A_n t}]$  gilt

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= \text{diag} \left[ \frac{d}{dt} e^{A_1 t}, \dots, \frac{d}{dt} e^{A_n t} \right] = \text{diag}[A_1 e^{A_1 t}, \dots, A_n e^{A_n t}] \\ &= \text{diag}[A_1, \dots, A_n] \text{diag}[e^{A_1 t}, \dots, e^{A_n t}] = \text{diag}[A_1, \dots, A_n] Q(t) \end{aligned}$$

und  $Q(0) = I$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Wir haben nun alle Hilfsmittel zur Verfügung, die wir zur praktischen Berechnung von  $e^{At}$  benötigen.

*Im Folgenden werden wird stets von einer reellen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ausgehen!*

Aufgrund von Satz 2.7(e) können wir davon ausgehen, dass  $A$  in reeller Jordan-Normalform vorliegt, d.h. wir können annehmen, dass die Matrix  $A$  in der Blockdiagonalform

$$A = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

vorliegt, wobei  $R$  die reellen und  $K$  die komplexen, nicht-reellen Eigenwerte von  $A$  als Eigenwerte besitzt. Bekanntlich hat dann  $R$  die Form

$$R = \text{diag}[J_1, \dots, J_p]$$

mit reellen Jordanblöcken der Form

$$J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (5)$$

wobei  $\lambda_k$  die reellen Eigenwerte von  $A$  sind. Die komplexe Matrix  $K$  hat ebenfalls Blockdiagonalform

$$K = \text{diag}[K_1, \dots, K_q],$$

wobei die einzelnen Blöcke die gleiche Bandstruktur wie die  $J_k$  besitzen mit dem Unterschied, dass anstatt reeller Zahlen jetzt  $2 \times 2$ -Matrizen stehen:

$$K_k = \begin{bmatrix} a_k & b_k & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ -b_k & a_k & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & a_k & b_k \\ 0 & 0 & & & & -b_k & a_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, q. \quad (6)$$

Hierbei ist  $a_k \pm ib_k, b_k \neq 0$ , für jedes  $k$  ein konjugiert komplexes Eigenwertepaar<sup>4</sup> der Matrix  $A$ .

Wegen Satz 2.7(e) und (f) genügt es nun für die Berechnung von  $e^{At}$  die Matrizen  $e^{J_1 t}, \dots, e^{J_p t}$  und  $e^{K_1 t}, \dots, e^{K_q t}$  zu berechnen. Die Herleitung der Formeln für Matrizen dieses Typs ist unser nächstes Ziel.

Der reelle Fall: Die Matrix  $J \in \mathbb{R}^{L \times L}$  habe die Form (5), besitze also die Darstellung  $J = P + D$  mit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich ist dann aufgrund der Beziehung  $PD = \lambda P = DP$  Satz 2.7(d) anwendbar und wir erhalten

$$e^{Jt} = e^{(P+D)t} = e^{Pt} e^{Dt}.$$

Die Matrix  $P$  ist nilpotent, genauer:  $P^l = 0$  für alle  $l \geq L$ . Daraus folgt

$$e^{Pt} = \sum_{l=0}^{L-1} \frac{t^l}{l!} P^l.$$

---

<sup>4</sup>Erinnerung: Hat eine reelle Matrix  $A$  einen komplexen Eigenwert  $a + ib$  mit Imaginärteil  $b \neq 0$ , so ist auch  $a - ib$  ein Eigenwert von  $A$ . Das Paar  $(a + ib, a - ib)$  ist dann ein konjugiert komplexes Eigenwertepaar von  $A$ .

Unter Berücksichtigung der Beziehung  $e^{Dt} = e^{\lambda t} I$  folgt dann

$$e^{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{L-1}}{(L-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Der komplexe Fall: Die Matrix  $K \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}$  habe die Form (6), lasse sich also in der Form  $K = Q + B$  schreiben mit

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C \end{bmatrix},$$

wobei

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Wegen der Beziehung  $QB = BQ$  (nachrechnen!) liefert Satz 2.7(d)

$$e^{Kt} = e^{(Q+B)t} = e^{Qt} e^{Bt}. \quad (8)$$

Für die Matrix  $Q$  gilt  $Q^k = 0$  für alle  $k \geq M$  und daraus folgt

$$e^{Qt} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{t^k}{k!} Q^k. \quad (9)$$

Aus (8), (9), Satz 2.7(f) und der leicht nachzurechnenden Beziehung (Übungsaufgabe 2 auf Blatt 2)

$$e^{Ct} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

ergibt sich schließlich die gesuchte Formel, in der wir die Abkürzung

$$G(t) := \begin{bmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$$

verwenden:

$$e^{\begin{bmatrix} C & I & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ 0 & & & C \end{bmatrix} t} = e^{at} \begin{bmatrix} G(t) & tG(t) & \frac{t^2}{2}G(t) & \cdots & \frac{t^{M-1}}{(M-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2}G(t) \\ & & & \ddots & tG(t) \\ & & & & G(t) \end{bmatrix}.$$

**2.8 Bemerkung:** Wie man sofort an den obigen Formeln erkennt, beschreiben die Realteile der Eigenwerte von  $A$  das Wachstumsverhalten der Lösungen für  $t \rightarrow \pm\infty$ , während die Imaginärteile das „Rotationsverhalten“ beschreiben.

Die obigen Erkenntnisse führen zu folgendem Rezept zur Berechnung von  $e^{At}$ :

1. Schritt: Berechnung der Eigenwerte von  $A$ .
2. Schritt: Berechnung der Eigenvektoren (und ggf. Hauptvektoren) von  $A$  und spaltenweise Anordnung dieser Vektoren zu einer Matrix  $T$ . Im Fall komplexer Eigenwerte verwendet man von den komplexen Eigen- und Hauptvektoren die Real- und Imaginärteile.
3. Schritt: Berechnung von  $T^{-1}$ .
4. Schritt: Berechnung von  $T^{-1}AT$  und Erkennen der Jordanblöcke  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$  in der Darstellung  $T^{-1}AT = \text{diag}[\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k]$ .
5. Schritt: Berechnung von  $e^{At}$  nach der Formel

$$e^{At} = T \text{diag}[e^{\tilde{A}_1 t}, \dots, e^{\tilde{A}_k t}] T^{-1}.$$

Dieses Rezept wollen wir nun an einem konkreten Beispiel durchexerzieren.

**2.9 Beispiel:** Wir wollen  $e^{At}$  berechnen für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Schritt: Das charakteristische Polynom von  $A$  ergibt sich zu  $-\lambda(\lambda+1)^2$ . Also ist 0 ein einfacher und  $-1$  ein doppelter Eigenwert von  $A$ .

2. Schritt: Einen Eigenvektor zum Eigenwert 0 liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{also etwa } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zur Ermittlung der Eigenvektoren zum Eigenwert  $-1$  müssen wir das System

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

lösen. Da der Rang der links stehenden Matrix 2 ist, hat diese Gleichung einen nur eindimensionalen Lösungsraum, der z.B. von dem Vektor  $[0, -1, 1]^T$  aufgespannt wird. Einen zweiten linear unabhängigen Vektor des verallgemeinerten Eigenraums zum Eigenwert  $-1$  liefert das Gleichungssystem  $(A + I)w = v$ , wobei  $v$  der bereits bestimmte Eigenvektor zum Eigenwert  $-1$  ist. Wir müssen also eine Lösung des folgenden Systems berechnen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Wie man leicht bestätigt, ist  $[-1, 0, 1]^T$  eine solche Lösung. Nun bilden wir aus den zwei Eigenvektoren und dem Hauptvektor die Matrix  $T$ :

$$T := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Schritt: Die zu  $T$  inverse Matrix ist

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zur Berechnung von  $T^{-1}$  kann man z.B. den Gauß-Jordan-Algorithmus anwenden.

4. Schritt: Aufgrund der Theorie ist nun bekannt, dass die Matrix  $A$  die reelle Jordan-Normalform

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

besitzt, was sich natürlich auch durch Berechnung des Matrizenprodukts  $T^{-1}AT$  ergibt. Wir erkennen nun die Jordanblöcke  $\tilde{A}_1 = [0]$  und  $\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , in der Reihenfolge, die durch die Anordnung der Eigen- und Hauptvektoren als Spalten von  $T$  bestimmt ist.

5. Schritt: Mit den zuvor erzielten Ergebnissen und der Formel (7) gilt

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ te^{-t} & e^{-t} & 0 \\ 1 - e^{-t} - te^{-t} & 1 - e^{-t} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

◇

**2.10 Bemerkung:** Für reelle oder komplexe Matrizen können wir analog auch die komplexe Jordan-Normalform verwenden. Dies macht das Verfahren sogar einfacher, denn im Komplexen gibt es nur einen Typ von Jordanblöcken, nämlich

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

mit

$$e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{L-1}}{(L-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Zu beachten ist hier, dass auch für eine reelle Matrix  $A$  sowohl die Transformationsmatrix  $T$  als auch Jordan-Normalform von  $A$  komplexe Zahlen als Einträge haben können.

### 3 Stabilität linearer Differentialgleichungen

Wir betrachten nun lineare homogene Differentialgleichungen

$$\dot{x} = Ax \quad (11)$$

mit  $x \in \mathbb{K}^n$ ,  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Ein solches System hat stets die *triviale Ruhelage*  $x_* = 0$ , d.h.  $e^{At}x_* = x_*$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

Wir wollen die Stabilitätseigenschaften dieser Ruhelage beschreiben und charakterisieren. Dazu verwenden wir eine Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{K}^n$ , die wir beliebig, aber fest wählen.

Zur Erinnerung: Eine Norm ist eine Funktion  $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (Positiv-Definitheit).
- (ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $x \in \mathbb{K}^n$  (Homogenität).
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{K}^n$  (Dreiecksungleichung).

Die Standardnorm im  $\mathbb{R}^n$  wird induziert von dem Euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

wobei  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  und  $y = [y_1, \dots, y_n]^T$ . Dann ist

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Die Standardnorm im  $\mathbb{C}^n$  wird induziert von der Sesquilinearform

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Auch hier ist

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

Die Wahl der Norm auf dem  $\mathbb{K}^n$  ist jedoch im Folgenden irrelevant, was daran liegt, dass alle Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum äquivalent zueinander sind. Das heißt, sind  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  zwei Normen, so gibt es eine Konstante  $C \geq 1$  mit

$$C^{-1}\|x\|' \leq \|x\| \leq C\|x\|', \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$$

**3.1 Definition:** Die Ruhelage  $x_* = 0$  der Differentialgleichung (11) heißt

- **stabil**, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  aus  $\|x\| < \delta$  folgt, dass  $\|e^{At}x\| < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$ .
- **attraktiv**, falls für jedes  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At}x = 0.$$

- **asymptotisch stabil**, falls sie stabil und attraktiv ist.
- **instabil**, falls sie nicht stabil ist.

In diesen Fällen bezeichnen wir auch die Differentialgleichung (11) als stabil, attraktiv, asymptotisch stabil bzw. instabil.

Mit  $\sigma(A)$  bezeichnen wir im Folgenden das *Spektrum* der Matrix  $A$ , d.h. die Menge der Eigenwerte von  $A$ .

Der folgende Satz charakterisiert die asymptotische Stabilität.

**3.2 Satz:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Ruhelage  $x_* = 0$  ist asymptotisch stabil.
- (ii) Jeder Eigenwert von  $A$  hat negativen Realteil.
- (iii) Es gibt Konstanten  $M \geq 1$ ,  $\beta > 0$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt, dass

$$\|e^{At}x\| \leq Me^{-\beta t}\|x\|, \quad \forall t \geq 0. \quad (12)$$

**Beweis:** „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Wir nehmen an,  $A$  hätte einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$  (Widerspruchannahme). Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  betrachten wir dann einen zugehörigen Eigenvektor  $x \in \mathbb{C}^n$ , d.h.  $Ax = \lambda x$ . Mit  $\lambda = a + ib$ ,  $a = \operatorname{Re}(\lambda)$ , folgt dann für alle  $t \geq 0$ , dass

$$\|e^{At}x\| = \|e^{\lambda t}x\| = \|e^{at}e^{ibt}x\| = e^{at} \underbrace{\|e^{ibt}x\|}_{=1} \geq \|x\| > 0. \quad (13)$$

Dabei haben wir verwendet, dass

$$e^{At}x = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \right) x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \lambda^k x = e^{\lambda t} x.$$

Die Ungleichung (13) steht offensichtlich im Widerspruch zur Attraktivität der Ruhelage. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  betrachten wir die Vektoren  $x_1 := \operatorname{Re}(x)$  und  $x_2 := \operatorname{Im}(x)$ . Aus der Eigenwertgleichung folgt

$$e^{At}x = e^{at}e^{ibt}x = e^{at}(\cos(bt) + i\sin(bt))(x_1 + ix_2).$$

Spalten wir dies in Real- und Imaginärteil auf, so erhalten wir

$$e^{At}x_1 = e^{at}(\cos(bt)x_1 - \sin(bt)x_2), \quad e^{At}x_2 = e^{at}(\sin(bt)x_1 + \cos(bt)x_2).$$

Insbesondere folgt daraus, dass

$$\|e^{A(2\pi n/b)}x_i\| \geq \|x_i\| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2.$$

Da  $x_1 \neq 0$  oder  $x_2 \neq 0$ , steht dies im Widerspruch zur Attraktivität.

„(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“: Aufgrund der für jede invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gültigen Abschätzung<sup>5</sup>

$$\|e^{T^{-1}ATt}x\| = \|T^{-1}e^{At}Tx\| \leq \|T^{-1}\| \|e^{At}\| \|T\| \|x\|$$

reicht es zu zeigen, dass

$$\|e^{At}\| \leq Me^{-\beta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (14)$$

<sup>5</sup>Hier verwenden wir die Submultiplikativität von Operatornormen.

falls  $A$  in Jordan-Normalform gegeben ist. Dazu wählen wir  $\beta > 0$  so, dass

$$\operatorname{Re}(\lambda) < -\beta < 0, \quad \forall \lambda \in \sigma(A). \quad (15)$$

In der Tat können wir die zu beweisende Ungleichung (14) auf den Fall reduzieren, dass  $A$  ein Jordanblock ist. Ist nämlich  $x \in \mathbb{K}^n$ , so gilt  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_r$ , wobei  $x_1, \dots, x_r$  die Komponenten von  $x$  bzgl. der Zerlegung in die Jordan-Unterräume sind, und da die Jordan-Unterräume für  $A$  in Jordan-Normalform senkrecht aufeinander stehen, gilt

$$\|e^{At}x\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^r e^{At}x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^r \|e^{At}x_i\|^2.$$

Gilt nun  $\|e^{At}x_i\| \leq M_i e^{-\beta t} \|x_i\|$  für  $1 \leq i \leq r$ , so folgt daraus

$$\|e^{At}x\|^2 \leq \left( \max_{i=1, \dots, r} M_i^2 \right) e^{-2\beta t} \sum_{i=1}^r \|x_i\|^2 = \left( \max_{i=1, \dots, r} M_i^2 \right) e^{-2\beta t} \|x\|^2,$$

und die zu beweisende Ungleichung folgt nach Wurzelziehen mit  $M = \max_i M_i$ .

Ist  $A$  ein Jordanblock zu einem Eigenwert  $\lambda = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , so wissen wir aufgrund der allgemeinen Überlegungen zur Berechnung von  $e^{At}$ , dass

$$e^{At} = e^{at} e^{ibt} P(t),$$

wobei  $P(t)$  nur Monome als Einträge hat (siehe Gleichung (10)). Wir erhalten damit

$$e^{\beta t} \|e^{At}\| = e^{(a+\beta)t} \|P(t)\|,$$

wobei  $a + \beta = \operatorname{Re}(\lambda) + \beta < 0$  wegen (15). Da der exponentielle Term  $e^{(a+\beta)t}$  das polynomielle Wachstum in  $\|P(t)\|$  dominiert, konvergiert  $e^{\beta t} \|e^{At}\|$  gegen Null, ist also insbesondere beschränkt durch eine Konstante  $M \geq 1$ . Damit ist (iii) bewiesen.

„(iii)  $\Rightarrow$  (i)“: Die Attraktivität ist trivial, denn aus (12) folgt unmittelbar, dass jede Lösung exponentiell gegen Null konvergiert. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  können wir zudem durch die Wahl von  $\delta := \varepsilon/M$  erreichen, dass aus  $\|x\| < \delta$  folgt, dass

$$\|e^{At}x\| \leq M e^{-\beta t} \|x\| < M\delta = \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Also ist die Ruhelage auch stabil.  $\square$

**3.3 Korollar:** Die Ruhelage  $x_* = 0$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn sie attraktiv ist.

**Beweis:** Es reicht zu zeigen, dass aus der Attraktivität die Stabilität folgt. Wie im Beweis von Satz 3.2 folgt aus der Attraktivität, dass kein Eigenwert  $\lambda \in \sigma(A)$  Realteil  $\geq 0$  haben kann. Folglich ist nach Satz 3.2  $x_* = 0$  asymptotisch stabil, also insbesondere stabil.  $\square$

Als nächstes wollen wir die Stabilität der trivialen Ruhelage mit Hilfe der Jordan-Normalform charakterisieren. Hier ergibt sich folgendes Resultat.

**3.4 Satz:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die Ruhelage  $x_* = 0$  ist stabil.
- (ii)  $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  und für alle Eigenwerte mit Realteil 0 stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
- (iii) Es gibt eine Konstante  $M \geq 1$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{K}^n$  gilt, dass

$$\|e^{At}x\| \leq M\|x\|, \quad \forall t \geq 0.$$

**Beweis:** „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Der Einfachheit halber betrachten wir nur den komplexen Fall. Wir nehmen an, die Ruhelage  $x_* = 0$  sei stabil und (ii) gelte nicht. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: Es gibt einen Eigenwert  $\lambda \in \sigma(A)$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  oder mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  und  $m_{\text{alg}}(\lambda) \neq m_{\text{geom}}(\lambda)$ . Im ersten Fall wählen wir einen Eigenvektor  $x \in \mathbb{C}^n$  zum Eigenwert  $\lambda = a + ib$  und sehen, dass

$$\|e^{At}x\| = e^{at}\|x\| \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Dies widerspricht offensichtlich der Stabilität, da wir einen Eigenvektor mit beliebig kleiner Norm wählen können. Im zweiten Fall gibt es einen Hauptvektor  $y \in \mathbb{C}^n$ , d.h.  $(A - \lambda I)y = x$  und  $(A - \lambda I)x = 0$ . Damit folgt

$$e^{(A-\lambda I)t}y = y + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (A - \lambda I)^{k-1} x = y + tx.$$

Multiplikation mit  $e^{\lambda t}$  auf beiden Seiten liefert

$$e^{At}y = e^{\lambda t}y + te^{\lambda t}x = e^{\lambda t}(y + tx).$$

Mit  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$  ergibt sich durch Anwendung der Dreiecksungleichung nach unten, dass

$$\|e^{At}y\| = \|tx + y\| \geq t\|x\| - \|y\| \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty,$$

im Widerspruch zur Stabilität.

„(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“: Wie im vorherigen Beweis können wir annehmen, dass  $A$  ein (reeller bzw. komplexer) Jordanblock ist. Erfüllt der zugehörige Eigenwert  $\lambda$  die Ungleichung  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , so folgt die Behauptung wie im vorherigen Beweis. Ist  $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ , so gilt nach Voraussetzung, dass entweder  $A = [0]$  (falls  $\lambda = 0$ ) oder  $A = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$ . In beiden Fällen gilt  $\|e^{At}x\| = \|x\|$  für alle  $t \geq 0$ , woraus die zu beweisende Aussage folgt.

„(iii)  $\Rightarrow$  (i)“: So wie im Beweis von Satz 3.2. □

Nun wollen wir noch eine weitere Methode zur Stabilitätsanalyse vorstellen, die sich auch für nichtlineare Systeme als sehr hilfreich erweisen wird. Dazu müssen wir zunächst wieder an einige Begriffe aus der Linearen Algebra erinnern.

**Einschub:** Positiv definite Matrizen

Eine Matrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt *symmetrisch*, falls  $P = P^T$ .<sup>6</sup> Eine Matrix  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt *hermitesch*, falls  $\bar{P}^T = P$ , wobei  $\bar{P}$  die Matrix ist, die durch komplexe Konjugation aller Einträge von  $P$  entsteht. In beiden Fällen schreiben wir  $P^*$  für  $P^T$  bzw.  $\bar{P}^T$ . (Was gemeint ist, wird aus dem Kontext ersichtlich werden.)

Eine symmetrische Matrix  $P$  heißt *positiv definit*, falls

$$x^T P x = \langle P x, x \rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Analog heißt eine hermitesche Matrix  $P$  *positiv definit*, falls

$$\bar{x}^T P x = \langle P x, x \rangle > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Wir erinnern an folgende Eigenschaften symmetrischer und hermitescher Matrizen  $P$ :

- (1) Alle Eigenwerte von  $P$  sind reell.
- (2) Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.
- (3)  $P$  ist diagonalisierbar durch eine orthogonale (im reellen Fall) bzw. unitäre Transformation (im komplexen Fall).
- (4)  $P$  ist positiv definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von  $P$  positiv sind.

Die Idee zur Stabilitätsanalyse ist nun folgende: Um zu zeigen, dass die Ruhelage  $x_* = 0$  asymptotisch stabil ist, suchen wir eine positiv definite Matrix  $P$ , die eine Gleichung der Form

$$A^* P + P A = -Q \quad (\text{Lyapunov-Gleichung}) \quad (16)$$

löst mit einer gegebenen positiv definiten Matrix  $Q$ . Falls es eine Lösung  $P$  dieser Gleichung gibt, definieren wir

$$V(x) := \langle P x, x \rangle, \quad V : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(e^{At} x) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle P e^{At} x, e^{At} x \rangle \\ &= \langle P A x, x \rangle + \langle P x, A x \rangle \\ &= \langle P A x, x \rangle + \langle A^* P x, x \rangle = \langle (A^* P + P A) x, x \rangle \\ &= -\langle Q x, x \rangle. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist stets  $< 0$ , falls  $x \neq 0$ . Dies bedeutet, dass die Funktion  $V$  längs von Lösungen mit Anfangswerten  $x \neq 0$  streng monoton fällt. Zudem

<sup>6</sup>  $P^T$  ist die transponierte Matrix, die aus  $P$  durch Vertauschen der Zeilen mit den Spalten entsteht, also  $P^T = (p_{ji})$ , falls  $P = (p_{ij})$ .

hat die Funktion  $V$  bei  $x_* = 0$  ihr globales Minimum. Dies deutet darauf hin, dass asymptotische Stabilität vorliegt.

Wir nennen eine Funktion  $V$  wie oben eine *quadratische Lyapunov-Funktion*. Später werden wir eine allgemeinere Definition von Lyapunov-Funktionen geben.

Geometrische Interpretation: Wir suchen ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{K}^n$ ,<sup>7</sup> so dass die Lösungen der Differentialgleichung in der davon induzierten Norm streng monoton fallen (und deshalb gegen die triviale Ruhelage konvergieren).

**3.5 Lemma:** *Hat die Lyapunov-Gleichung (16) zu einer Matrix  $Q$  mit  $Q = Q^*$  eine Lösung  $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , so ist auch  $\frac{1}{2}(P+P^*)$  eine Lösung. Hat sie eine eindeutige Lösung  $P$ , so gilt  $P = P^*$ .*

**Beweis:** Ist  $P$  eine Lösung, so folgt

$$\begin{aligned} A^*(P + P^*) + (P + P^*)A &= (A^*P + PA) + (A^*P^* + P^*A) \\ &= -Q + (PA + A^*P)^* = -Q + (-Q)^* = -2Q. \end{aligned}$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Ist die Lösung  $P$  eindeutig, so muss also  $\frac{1}{2}(P+P^*) = P$  gelten. Daraus folgt  $P^* = \frac{1}{2}(P+P^*)^* = \frac{1}{2}(P^*+P) = P$ .  $\square$

**3.6 Lemma:** *Sei  $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrix mit  $P = P^*$ . Dann gibt es eine Konstante  $c > 0$ , so dass*

$$-c\|x\|^2 \leq \langle Px, x \rangle \leq c\|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

**Beweis:** Wir betrachten die auf der kompakten Menge  $S_1 := \{y \in \mathbb{K}^n : \|y\| = 1\}$  definierte stetige Funktion  $h(y) := \langle Py, y \rangle$ . Zunächst überlegen wir uns, dass im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  diese Funktion nur reelle Werte annimmt, denn

$$\overline{\langle Py, y \rangle} = \overline{y^T P y} = y^T \overline{P y} = (y^T \overline{P y})^T = \overline{y}^T P^* y = \langle Py, y \rangle.$$

Nun definieren wir  $c_{\min} := \min_{y \in S_1} h(y)$  und  $c_{\max} := \max_{y \in S_1} h(y)$ , wobei wir verwenden dass stetige Funktionen auf kompakten Mengen ein Minimum und ein Maximum annehmen. Wir definieren  $c := \max\{c_{\max}, -c_{\min}\}$ . Ist  $c_{\max} < 0$ , so gilt  $-c_{\min} \geq -c_{\max} > 0$ , woraus folgt, dass  $c \geq 0$ . Ist  $c = 0$ , so gilt  $h(y) = 0$  für alle  $y \in S_1$  und wir ersetzen  $c$  durch  $c + 1$  (wie man sich leicht überlegt, kann das nur der Fall sein, wenn  $P = 0$ ). Dann gilt für jedes  $x \in \mathbb{K}^n$ , dass

$$\langle Px, x \rangle = \|x\|^2 \left\langle P \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \|x\|^2 h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in [c_{\min}\|x\|^2, c_{\max}\|x\|^2].$$

Daraus folgt

$$\langle Px, x \rangle \leq c_{\max}\|x\|^2 \leq c\|x\|^2 \quad \text{und} \quad \langle Px, x \rangle \geq c_{\min}\|x\|^2 \geq -c\|x\|^2,$$

womit das Lemma bewiesen ist.  $\square$

<sup>7</sup>Beachte, dass  $\langle x, y \rangle_P := \langle Px, y \rangle$  im reellen Fall ein Skalarprodukt ist, denn diese Funktion ist bilinear, positiv definit (d.h.  $\langle x, x \rangle_P > 0$  für  $x \neq 0$ ) und symmetrisch, da  $\langle x, y \rangle_P = \langle Px, y \rangle = \langle x, P^T y \rangle = \langle x, Py \rangle = \langle Py, x \rangle = \langle y, x \rangle_P$ .

**3.7 Bemerkung:** Das obige Lemma gilt sogar für beliebige Matrizen  $P$  (ohne die Bedingung, dass  $P = P^*$ ), denn für jede Matrix  $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt

$$\begin{aligned}\langle Px, x \rangle &= \frac{1}{2} \langle Px, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Px, x \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Px, x \rangle + \frac{1}{2} \langle P^*x, x \rangle = \left\langle \frac{1}{2}(P + P^*)x, x \right\rangle,\end{aligned}$$

und die Matrix  $R := \frac{1}{2}(P + P^*)$  erfüllt  $R^* = R$ .

Nun können wir die asymptotische Stabilität mit Hilfe von quadratischen Lyapunov-Funktionen charakterisieren.

**3.8 Satz:** Die Ruhelage  $x_* = 0$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Lyapunov-Gleichung (16) für eine beliebige, aber fest gewählte positiv definite Matrix  $Q$  eine (sogar eindeutige) positiv definite Lösung  $P$  hat.

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “: Falls eine positive definite Lösung  $P$  existiert, betrachten wir  $V(x) := \langle Px, x \rangle$ . Wie oben zeigen wir, dass

$$\frac{d}{dt} V(e^{At}x) = -\langle Qe^{At}x, e^{At}x \rangle = -\|e^{At}x\|_Q^2 \leq -\beta \|e^{At}x\|_P^2 = -\beta V(e^{At}x),$$

wobei wir verwenden dass je zwei Normen auf  $\mathbb{K}^n$  äquivalent zueinander sind. Wir zeigen nun zunächst, dass daraus die Ungleichung

$$V(e^{At}x) \leq e^{-\beta t} V(x), \quad \forall t \geq 0, \quad (17)$$

folgt. Dies ist offensichtlich für  $t = 0$  erfüllt. Wir nehmen nun an, es gäbe ein  $t_2 > 0$ , so dass

$$V(e^{At_2}x) > e^{-\beta t_2} V(x). \quad (18)$$

Dann gibt es aus Stetigkeitsgründen ein  $t_1 \in [0, t_2]$  mit

$$V(e^{At_1}x) = e^{-\beta t_1} V(x)$$

und

$$V(e^{At}x) > e^{-\beta t} V(x) \quad \text{für alle } t \in (t_1, t_2]. \quad (19)$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (V(e^{At}x) - e^{-\beta t} V(x)) &\leq -\beta V(e^{At}x) + \beta e^{-\beta t} V(x) \\ &= -\beta (V(e^{At}x) - e^{-\beta t} V(x)) \stackrel{(19)}{\leq} 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2].\end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz<sup>8</sup> liefert ein  $\tilde{t} \in [t_1, t_2]$  mit

$$\begin{aligned}V(e^{At_2}x) - e^{-\beta t_2} V(x) &\leq V(e^{At_1}x) - e^{-\beta t_1} V(x) \\ &\quad + (t_2 - t_1) \frac{d}{dt} \Big|_{t=\tilde{t}} (V(e^{At}x) - e^{-\beta t} V(x)).\end{aligned}$$

<sup>8</sup>Erinnerung: Der Mittelwertsatz besagt, dass für eine auf einem Intervall  $[a, b]$  definierte stetige und auf  $(a, b)$  differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $\xi \in (a, b)$  existiert, so dass  $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$  gilt.

Nun folgt aber

$$\underbrace{V(e^{At_1}x) - e^{-\beta t_1}V(x)}_{=0} + (t_2 - t_1) \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_1} (V(e^{At}x) - e^{-\beta t}V(x)) \leq 0$$

und damit, im Widerspruch zu (18),

$$V(e^{At_2}x) \leq e^{-\beta t_2}V(x).$$

Wir erhalten folglich

$$\|e^{At}x\|^2 \leq \text{const} \cdot \|e^{At}x\|_P^2 \stackrel{(17)}{\leq} \text{const} \cdot e^{-\beta t} \|x\|_P^2 \leq \text{const} \cdot e^{-\beta t} \|x\|^2.$$

Hieraus folgt nach Wurzelziehen mit Satz 3.2 die asymptotische Stabilität.

„ $\Rightarrow$ “: Nun müssen wir umgekehrt zeigen, dass aus der asymptotischen Stabilität der Ruhelage  $x_* = 0$  die Existenz einer Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$A^*P + PA = -Q$$

folgt, wobei die positive definite Matrix  $Q$  beliebig vorgegeben ist. Wir dürfen dabei annehmen, dass  $A$  in Jordan-Normalform gegeben ist, denn für  $\tilde{A} = C^{-1}AC$  sieht man leicht, dass  $P$  genau dann die Lyapunov-Gleichung löst, wenn  $\tilde{P} = C^*PC$  für  $\tilde{Q} = C^*QC$  die Gleichung

$$\tilde{A}^*\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} = -\tilde{Q}$$

löst (nachrechnen!). Dann ist  $A$  also von der Form

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \dots & & \\ & \alpha_2 & * & \dots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{n-1} & * \\ & & & & \alpha_n \end{bmatrix},$$

wobei  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  gerade die Eigenwerte von  $A$  sind. Schreibt man die Spalten von  $P$  untereinander in einen Spaltenvektor  $p \in \mathbb{K}^{n^2}$  und macht das Gleiche für die Matrix  $Q$  und einen Vektor  $q$ , so ist die Lyapunov-Gleichung äquivalent zu

$$\hat{A}p = q$$

mit einer geeigneten Matrix  $\hat{A} \in \mathbb{K}^{n^2 \times n^2}$ . Durch Nachrechnen sieht man, dass  $\tilde{A}$  eine untere Dreiecksmatrix mit den Einträgen  $\bar{\alpha}_1 + \alpha_1, \bar{\alpha}_1 + \alpha_2, \dots, \bar{\alpha}_1 + \alpha_n, \bar{\alpha}_2 + \alpha_1, \dots, \bar{\alpha}_n + \alpha_n$  auf der Diagonalen ist (siehe Übungsaufgabe 3 auf Blatt 4). Wir wissen aus der Linearen Algebra, dass eine untere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn die Diagonaleinträge alle verschieden von Null sind. Da alle  $\alpha_i$  negativen Realteil haben, sind die Summen  $\bar{\alpha}_i + \alpha_j$  alle ungleich Null. Deshalb gibt es eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems  $\hat{A}p = q$ , nämlich

$p = \hat{A}^{-1}q$ . Nach Lemma 3.5 gilt  $P = P^*$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $P$  positiv definit ist, falls  $Q$  positiv definit ist.

Wir machen die Widerspruchsannahme, dass  $P$  nicht positiv definit ist und betrachten  $V(x) := \langle Px, x \rangle$ . Dann gibt es ein  $x_0 \in \mathbb{K}^n$  mit  $x_0 \neq 0$  und  $V(x_0) = \langle Px_0, x_0 \rangle \leq 0$ . Da  $e^{At}$  für alle  $t$  invertierbar ist, folgt  $e^{At}x_0 \neq 0$  für alle  $t \geq 0$ . Wir machen uns klar, dass

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} V(e^{At}x) = -\langle Qx, x \rangle < 0.$$

Daraus folgt, dass  $t \mapsto V(e^{At}x)$  (für jedes  $x \neq 0$ ) streng monoton fällt. Insbesondere existiert ein  $c > 0$  mit  $V(e^{At}x_0) \leq -c$  für alle  $t \geq 1$ . Aus Lemma 3.6 folgt die Existenz einer Konstanten  $\tilde{c} > 0$ , so dass

$$\|e^{At}x_0\|^2 \geq -\tilde{c} \cdot V(e^{At}x_0) \geq \tilde{c}c > 0, \quad \forall t \geq 1.$$

Also konvergiert  $e^{At}x_0$  nicht gegen die Ruhelage  $x_* = 0$  im Widerspruch zur asymptotischen Stabilität. Folglich ist  $P$  positiv definit.  $\square$

**3.9 Beispiel:** Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}}_{=:A} x.$$

Da die Matrix  $A$  eine untere Dreiecksmatrix ist, stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen. Wir sehen daher sofort, dass die triviale Ruhelage des Systems nach dem Eigenwertkriterium aus Satz 3.2 asymptotisch stabil ist. Wir wollen nun eine Lösung der zugehörigen Lyapunov-Gleichung finden, die hier für  $Q = I$  folgendermaßen aussieht:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es handelt sich offenbar um ein lineares Gleichungssystem in den Variablen  $p_{11}, p_{12}, p_{22}$ . Wir schreiben dieses zunächst in der vertrauten Form:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wir können das Gleichungssystem nun mit Hilfe eines Standardverfahrens unserer Wahl lösen und erhalten

$$\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{30} \\ -\frac{1}{30} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung der Lyapunov-Gleichung Lösung ist also

$$P = \begin{bmatrix} \frac{17}{30} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

◇

Es bleibt die Frage, ob man mit Hilfe von Lyapunov-Funktionen auch die Stabilität der trivialen Ruhelage charakterisieren kann. Dazu erinnern wir daran, dass eine Matrix  $P$  mit  $P = P^*$  *positiv semi-definit* heißt, falls

$$\langle Px, x \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{K}^n.$$

Nun betrachten wir die Lyapunov-Gleichung

$$A^*P + PA = -Q$$

mit einer positiv semi-definiten Matrix  $Q$  und suchen aber weiterhin nach einer positiv definiten Lösung  $P$ . Existiert eine solche Lösung  $P$ , so folgt wie oben

$$\frac{d}{dt}V(e^{At}x) = -\langle Qe^{At}x, e^{At}x \rangle \leq 0$$

für beliebige  $x \in \mathbb{K}^n$  und  $t \in \mathbb{R}$ , woraus  $V(e^{At}x) \leq V(x)$  für alle  $t \geq 0$  folgt. Dies impliziert die Stabilität, denn unter Verwendung der Äquivalenz von Normen auf  $\mathbb{K}^n$  gilt

$$\|e^{At}x\|^2 \leq \text{const} \cdot V(e^{At}x) \leq \text{const} \cdot V(x) \leq \text{const} \cdot \|x\|^2.$$

Die Umkehrung ist nicht so einfach wie im Fall der asymptotischen Stabilität. Wir dürfen wieder annehmen, dass  $A$  in (komplexer) Jordan-Normalform gegeben ist. Unter der Annahme der Stabilität können wir die dann  $A$  in einen asymptotisch stabilen und einen nur stabilen Teil aufspalten, d.h.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

wobei die Eigenwerte von  $A_1$  alle Realteil  $< 0$  haben und  $A_2$  eine Diagonalmatrix mit Eigenwerten auf der imaginären Achse ist. (Hier verwenden wir Satz 3.4, der u.a. besagt, dass es zu Eigenwerten mit verschwindendem Realteil keine nichttrivialen Jordanblöcke gibt.) Sei  $A_1 \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1}$  und  $A_2 \in \mathbb{K}^{n_2 \times n_2}$ , wobei  $n_1 + n_2 = n$ . Ist dann  $Q_1 \in \mathbb{K}^{n_1 \times n_1}$  eine beliebige positiv definite Matrix, so finden wir nach Satz 3.8 eine eindeutige positiv definite Lösung  $P_1$  der Gleichung

$$A_1^*P_1 + P_1A_1 = -Q_1.$$

Definieren wir deshalb  $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$  durch

$$P := \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix},$$

so gilt  $P = P^*$  und

$$\begin{aligned} A^*P + PA &= \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2 \times n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1^*P_1 + P_1A_1 & 0 \\ 0 & A_2^* + A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: Q, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass  $A_2^* = \overline{A_2}$  und dass alle Einträge von  $A_2$  rein imaginäre Zahlen sind. Da  $Q$  positiv semi-definit ist, haben wir folgenden Satz bewiesen:

**3.10 Satz:** *Existiert eine positiv definite Lösung der Lyapunov-Gleichung (16) für eine positiv semi-definite Matrix  $Q$ , so ist die Ruhelage  $x_* = 0$  stabil. Ist umgekehrt  $x_* = 0$  stabil, so gibt es eine positiv semi-definite Matrix  $Q$ , so dass die zugehörige Lyapunov-Gleichung (16) eine positiv definite Lösung  $P$  hat.*

## 4 Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungen

Bevor wir zur Behandlung linearer Kontrollsysteme kommen, betrachten wir nun nichtlineare Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x} = f(x), \tag{20}$$

wobei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  definierte lokal Lipschitz-stetige Funktion<sup>9</sup> ist. (Der Einfachheit halber betrachten wir ab jetzt nur noch den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .)

Der Satz von Picard-Lindelöf aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen garantiert, dass zu jedem zugehörigen Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \in D$$

eine eindeutige lokale Lösung  $\lambda : I \rightarrow D$  existiert, wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I$  ist.<sup>10</sup> Eine solche Lösung kann stets auf ein maximales (offenes) Existenzintervall  $I_{\max}(x_0)$  mit  $I \subset I_{\max}(x_0)$  fortgesetzt werden. Wir bezeichnen die so fortgesetzte Lösung mit  $\varphi(t; x_0)$ ,  $t \in I_{\max}(x_0)$ .

Eine *Ruhelage (oder ein Gleichgewicht, Fixpunkt, Equilibrium)* von (20) ist ein  $x_* \in D$  mit  $f(x_*) = 0$ . Die zugehörige Lösung ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert und erfüllt  $\varphi(t; x_*) = x_*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , denn diese konstante Funktion löst offensichtlich das Anfangswertproblem  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_*$ .

Wir wollen nun wieder die Stabilität von Ruhelagen analysieren (Motivation: invertiertes Pendel). Dazu verallgemeinern wir zunächst die Stabilitätsbegriffe des vorherigen Abschnitts.

<sup>9</sup>Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist lokal Lipschitz-stetig, falls zu jedem  $x \in D$  eine Umgebung  $U \subset D$  von  $x$  und eine Konstante  $L_U \geq 0$  existieren mit  $\|f(y) - f(z)\| \leq L_U \|y - z\|$  für alle  $y, z \in U$ .

<sup>10</sup>Zur Wiederholung: Eine Lösung der Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x)$  ist eine differenzierbare Funktion  $\lambda : I \rightarrow D$ , definiert auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , so dass  $\lambda(t) = f(\lambda(t))$  für alle  $t \in I$ .

**4.1 Definition:** Eine Ruhelage  $x_* \in D$  der Differentialgleichung (20) heißt

- (i) **stabil**, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass aus  $\|x - x_*\| < \delta$  und  $x \in D$  folgt, dass die Lösung  $\varphi(t; x)$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist und  $\|\varphi(t; x) - x_*\| < \varepsilon$  für alle  $t \geq 0$  erfüllt.
- (ii) **attraktiv**, falls es ein  $\gamma > 0$  gibt, so dass aus  $\|x - x_*\| < \gamma$  und  $x \in D$  folgt, dass die Lösung  $\varphi(t; x)$  für alle  $t \geq 0$  definiert ist mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x) = x_*.$$

- (iii) **asymptotisch stabil**, falls sie stabil und attraktiv ist.
- (iv) **instabil**, falls sie nicht stabil ist.

**4.2 Bemerkung:** Diese Definition lässt sich leicht von Ruhelagen auf beliebige Lösungen, die auf  $[0, \infty)$  existieren, verallgemeinern.

Wir werden wieder zwei Methoden zur Untersuchung der Stabilität vorstellen. Zunächst verallgemeinern wir die zweite Methode, die wir für lineare Systeme verwendet haben.

**4.3 Definition:** Sei  $x_*$  eine Ruhelage der Differentialgleichung (20) und  $\tilde{D} \subset D$  eine offene Umgebung von  $x_*$ . Eine  $C^1$ -Funktion  $V : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Lyapunov-Funktion (bzgl.  $x_*$ )**, falls sie folgende Eigenschaften hat:

- (i) Für alle  $x \in \tilde{D}$  gilt  $V(x) \geq 0$  und  $V(x) = 0$  genau dann, wenn  $x = x_*$ .
- (ii) Für alle  $x \in \tilde{D}$  mit  $x \neq x_*$  gilt<sup>11</sup>

$$\nabla V(x) \cdot f(x) < 0. \tag{21}$$

Falls an Stelle von (21) gilt, dass

$$\nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad \forall x \in \tilde{D},$$

so heißt  $V$  **schwache Lyapunov-Funktion (bzgl.  $x_*$ )**,

**4.4 Bemerkung:** Die Notation  $\nabla V(x)$  in obiger Definition steht für den Gradienten der Funktion  $V$  an der Stelle  $x$ , d.h. für den Zeilenvektor

$$\nabla V(x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right].$$

Wir führen zudem die Notation

$$\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot f(x)$$

---

<sup>11</sup>Beachte:  $\nabla V(x) \cdot f(x)$  ist ein Skalarprodukt („Zeile mal Spalte“).

ein. Dass diese Notation sinnvoll ist, ergibt sich aus der Identität

$$\nabla V(x) \cdot f(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(\varphi(t; x)),$$

die man mit Hilfe der Kettenregel der Differentialrechnung einsieht.

**4.5 Beispiel:** Wir betrachten die triviale Ruhelage  $x_* = 0$  einer linearen Differentialgleichung

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ist  $x_*$  asymptotisch stabil, so ist die mit Hilfe der Lösung der Lyapunov-Gleichung

$$A^*P + PA = -Q \quad (Q \text{ positiv definit})$$

definierte Funktion  $V(x) := \langle Px, x \rangle$  eine auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definierte Lyapunov-Funktion, denn sie ist offensichtlich stetig differenzierbar, sie erfüllt  $V(x) \geq 0$  mit Gleichheit nur im Fall  $x = 0$  und es gilt nach der Kettenregel für Ableitungen, dass

$$\nabla V(x) \cdot Ax = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(e^{At}x) = -\langle Qx, x \rangle < 0 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Ist  $Q$  nur positiv semi-definit, so ist  $V$  eine schwache Lyapunov-Funktion. Wir nennen eine (schwache) Lyapunov-Funktion der Form  $V(x) = \langle Px, x \rangle$  auch (*schwache*) *quadratische Lyapunov-Funktion*.  $\diamond$

**4.6 Satz:** Sei  $x_* \in D$  eine Ruhelage der Differentialgleichung (20). Dann gilt:

- (i) Falls eine schwache Lyapunov-Funktion existiert, ist  $x_*$  stabil.
- (ii) Falls eine Lyapunov-Funktion existiert, ist  $x_*$  asymptotisch stabil.

**Beweis:** Wird aus Zeitgründen ausgelassen.  $\square$

Setzen wir zusätzlich voraus, dass die rechte Seite  $f$  stetig differenzierbar auf  $D$  ist, so können wir die asymptotische Stabilität oft durch Betrachtung der *Linearisierung* bei  $x_*$  nachweisen. Dies ist die lineare Differentialgleichung

$$\dot{z} = Az, \quad A := Df(x_*), \tag{22}$$

wobei  $Df(x_*)$  die Jacobi-Matrix von  $f$  im Punkt  $x_*$  ist, also die Matrix

$$Df(x_*) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_*) \right]_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Dabei sind  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die Komponentenfunktionen von  $f$ .

Nun beweisen wir den *Linearisierungssatz*:

**4.7 Satz:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und  $x_* \in D$  eine Ruhelage von (20). Dann gilt: Ist die triviale Ruhelage der linearen Differentialgleichung (22) asymptotisch stabil, so ist die Ruhelage  $x_*$  der nichtlinearen Differentialgleichung (20) ebenfalls asymptotisch stabil.

**Beweis:** Wir nehmen an, dass die Linearisierung asymptotisch stabil ist. O.B.d.A. sei  $x_* = 0$ . (Ansonsten betrachten wir die Differentialgleichung  $\dot{x} = f(x + x_*)$ , deren Lösungen gegeben sind durch  $\psi(t; x) = \varphi(t; x + x_*) - x_*$ .) Nach Satz 3.8 existiert dann eine quadratische Lyapunov-Funktion  $V(z) = \langle Pz, z \rangle$  für die Linearisierung, wobei  $P$  die Lösung der Lyapunov-Gleichung (16) für ein positiv definites  $Q$  ist. Da  $f$  differenzierbar ist, gilt

$$f(x) = f(x_*) + Df(x_*)(x - x_*) + r(x) = Ax + r(x)$$

mit einer Funktion  $r(\cdot)$ , so dass  $r(x)/\|x\| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \nabla V(x) \cdot f(x) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} V(\varphi(t; x)) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle P\varphi(t; x), \varphi(t; x) \rangle \\ &= \langle Pf(x), x \rangle + \langle Px, f(x) \rangle \\ &= \langle PAx, x \rangle + \langle Pr(x), x \rangle + \langle Px, Ax \rangle + \langle Px, r(x) \rangle \\ &= -\langle Qx, x \rangle + 2\langle Pr(x), x \rangle. \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck lässt sich wegen der Äquivalenz von Normen nach oben abschätzen durch  $-c\|x\|^2$  für eine Konstante  $c > 0$ . Wegen der Konvergenz  $r(x)/\|x\| \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$  finden wir zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so dass (unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$\langle Pr(x), x \rangle = \|x\|^2 \left\langle P \frac{r(x)}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \|x\|^2 \|P\| \varepsilon$$

für alle  $x \in D$  mit  $\|x\| < \delta$ . Insbesondere finden wir ein  $\delta > 0$ , so dass aus  $\|x\| < \delta$  folgt (wähle  $\delta = \delta(\varepsilon)$  für  $\varepsilon = c/(4\|P\|)$ ), dass

$$\nabla V(x) \cdot f(x) \leq -\frac{c}{2}\|x\|^2.$$

Die Funktion  $V$ , eingeschränkt auf  $\tilde{D} := D \cap B_\delta(0)$ ,<sup>12</sup> ist dann eine Lyapunov-Funktion, denn sie ist stetig differenzierbar, erfüllt  $V(x) > 0$  für  $x \in \tilde{D} \setminus \{0\}$  und  $\nabla V(x) \cdot f(x) < 0$  für  $x \in \tilde{D} \setminus \{0\}$ . Nach Satz 4.6 ist  $x_*$  also asymptotisch stabil.  $\square$

Aus den Sätzen 4.7, 3.8 und 3.2 ergibt sich nun folgendes Korollar:

**4.8 Korollar:** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $x_* \in D$  eine Ruhelage von  $\dot{x} = f(x)$  und  $A := Df(x_*)$ . Dann ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend für die asymptotische Stabilität von  $x_*$ :

<sup>12</sup>  $B_\delta(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$ .

- (i) Alle Eigenwerte von  $A$  haben negativen Realteil.
- (ii) Es existieren Konstanten  $M \geq 1$  und  $\beta > 0$  mit  $\|e^{At}x\| \leq Me^{-\beta t}\|x\|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t \geq 0$ .
- (iii) Es existiert eine positiv definite Lösung  $P$  der Lyapunov-Gleichung

$$A^*P + PA = -Q$$

für eine (und damit für alle) positiv definiten Matrizen  $Q$ .

Das folgende simple Beispiel zeigt, dass (i) die reine Stabilität der Linearisierung nicht die Stabilität der Ruhelage des nichtlinearen Systems impliziert und (ii) die Umkehrung von Satz 4.7 nicht gilt.

**4.9 Beispiel:** Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^3. \tag{23}$$

Offensichtlich liegt bei  $x_* = 0$  eine Ruhelage vor. Die Linearisierung in dieser Ruhelage ist gegeben durch

$$\dot{z} = 0$$

und hat folglich eine stabile triviale Ruhelage. Da die Werte der Funktion  $f(x) := x^3$  jedoch für  $x > 0$  positiv und für  $x < 0$  negativ sind, entfernen sich alle Lösungen der nichtlinearen Gleichung (23) von der Ruhelage und streben gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$ .

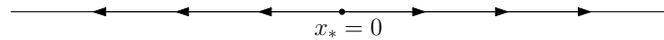


Abbildung 2: Phasenportrait der Differentialgleichung  $\dot{x} = x^3$ .

Wenn wir die rechte Seite  $x^3$  durch  $-x^3$  ersetzen, so ist die Ruhelage  $x_* = 0$  asymptotisch stabil, aber an der Linearisierung ändert sich nichts. Insbesondere sehen wir daran, dass die Kriterien in Korollar 4.8 nur hinreichend, aber nicht notwendig sind.  $\diamond$

Nun betrachten wir ein Beispiel einer nicht-quadratischen Lyapunov-Funktion.

**4.10 Beispiel:** Wir betrachten die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^4, \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

mit rechter Seite

$$f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 2x_2^4, -x_2), \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Offensichtlich ist  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  eine Ruhelage. Wir definieren

$$V(x_1, x_2) := 6x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_1x_2^4 + x_2^8$$

und weisen nach, dass es sich dabei um eine (in einer Umgebung von  $(0, 0)$  definierte) Lyapunov-Funktion handelt. Offensichtlich ist  $V$  stetig differenzierbar und es gilt  $V(0, 0) = 0$ . Der Gradient von  $V$  ergibt sich zu

$$\nabla V(x_1, x_2) = 4 [3x_1 + x_2^4, 6x_2 + 4x_1x_2^3 + 2x_2^7].$$

Damit erhält man

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 4 [3x_1 + x_2^4, 6x_2 + 4x_1x_2^3 + 2x_2^7] \cdot \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_2^4 \\ -x_2 \end{bmatrix} = -24(x_1^2 + x_2^2).$$

Dieser Ausdruck ist  $< 0$  für alle  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ . Außerdem gilt  $\nabla V(0, 0) = (0, 0)$  und die Hesse-Matrix<sup>13</sup> von  $V$  bei  $(0, 0)$  ist  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ , also positiv definit. Damit ist  $(0, 0)$  ein striktes lokales Minimum von  $V$  und es folgt, dass die Einschränkung von  $V$  auf eine klein genug gewählte Umgebung von  $(0, 0)$  eine Lyapunov-Funktion ist.  $\diamond$

Ein großer Vorteil der Verwendung von Lyapunov-Funktionen gegenüber der Eigenwertanalyse besteht darin, dass man beim Vorliegen einer Lyapunov-Funktion etwas über die Menge

$$A(x_*) := \left\{ x \in D : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x) = x_* \right\}$$

aussagen kann, die wir auch den *Einzugsbereich* der Ruhelage  $x_*$  nennen. Der Einzugsbereich enthält nämlich stets den gesamten Definitionsbereich der Lyapunov-Funktion (Beweis: Übungsaufgabe). Ist der Einzugsbereich  $A(x_*)$  identisch mit dem Definitionsbereich  $D$  der rechten Seite, so nennen wir die Ruhelage  $x_*$  auch *global asymptotisch stabil*. Im Falle einer linearen Differentialgleichung ist dies stets der Fall.

## 5 Lineare Kontrollsysteme

Ein *lineares Kontrollsystem* (oder *lineares Regelungssystem*) ist gegeben durch eine Familie von linearen inhomogenen Differentialgleichungen der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{24}$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $u(\cdot)$  eine Funktion ist, die wir in die rechte Seite einsetzen dürfen, um das Verhalten des Lösungen zu verändern. Diese

<sup>13</sup>Das ist die symmetrische Matrix  $(h_{ij})$  mit Einträgen  $h_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Funktion wird als Steuerung oder Kontrolle interpretiert, und sie parametrisiert die gegebene Familie von Differentialgleichungen. Wir nennen  $u(\cdot)$  auch *Kontrollfunktion* (andere Bezeichnung: *Eingang*).

Bevor wir beginnen, die Eigenschaften linearer Kontrollsysteme zu analysieren, müssen wir uns Gedanken darüber machen, welche Funktionen  $u(\cdot)$  wir als Kontrollfunktionen verwenden wollen und dürfen. Klar ist, dass wir (aus rein mathematischen Gründen) beliebige stetige Funktionen  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  verwenden dürfen, denn die „Variation der Konstanten“-Formel (siehe Satz 2.4) liefert uns dann eindeutige Lösungen, die durch

$$\varphi(t; x_0, u) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

gegeben sind. Nun ist es so, dass man die Steuerung auch instantan ändern möchte („Schalten“), d.h. man möchte Sprünge bzw. Unstetigkeiten zulassen. Deshalb erweitern wir die Klasse der stetigen Kontrollfunktionen zur Klasse der *stückweise stetigen Kontrollfunktionen*. Das sind alle Funktionen  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ , für die es eine Zerlegung von  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$  in Teilintervalle gibt (endlich viele auf beschränkten Intervallen), so dass  $u$  auf dem Inneren von jedem dieser Teilintervalle stetig ist. Man macht sich leicht klar, dass für solche Funktionen die Formel (25) immer noch Sinn ergibt, da der Integrand nur an endlich vielen Stellen unstetig ist. Die Lösungen  $\varphi(\cdot; x_0, u)$  sind dann an den Stellen, wo  $u$  unstetig ist, nicht mehr notwendigerweise differenzierbar. Dennoch kann man zeigen, dass die so (d.h. durch (25)) definierten Lösungen eindeutig sind. (Man setzt ja nur Lösungen von Differentialgleichungen mit stetiger rechter Seite zusammen.)

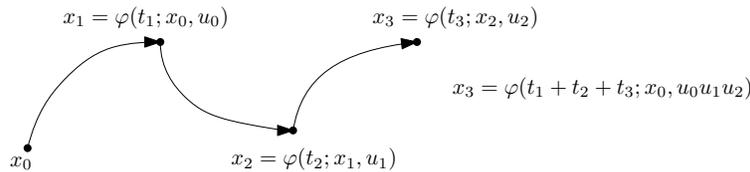


Abbildung 3: Zusammensetzen von Lösungskurven.

Im Folgenden sei die Menge aller zulässigen Kontrollfunktionen für das lineare Kontrollsystem (24) also stets gegeben durch

$$\mathcal{U} := \text{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m) := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m : u \text{ stückweise stetig}\}.$$

Wir führen nun einige grundlegende Begriffe ein.

**5.1 Definition:** Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und  $t \geq 0$ . Dann heißt  $y$  **erreichbar von  $x$  in Zeit  $t$** , falls ein  $u \in \mathcal{U}$  existiert mit

$$y = \varphi(t; x, u).$$

Wir sagen in diesem Fall auch, dass  $x$  nach  $y$  **kontrolliert (oder gesteuert)** werden kann. Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t \geq 0$  definieren wir die Menge

$$\mathcal{R}_t(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathcal{U} \text{ mit } y = \varphi(t; x, u)\}$$

der von  $x$  aus in der Zeit  $t$  erreichbaren Zustände. Das lineare Kontrollsystem (24) heißt **(vollständig) kontrollierbar**, falls für beliebige  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt, dass  $y$  von  $x$  erreichbar ist, d.h.  $y \in \mathcal{R}_t(x)$  für ein  $t \geq 0$ .

**5.2 Bemerkung:** In der obigen Definition verwenden wir den Begriff „Zustand“ äquivalent zu „Punkt aus dem  $\mathbb{R}^n$ “. Wir interpretieren die Punkte im  $\mathbb{R}^n$  also als die möglichen Zustände, die das lineare Kontrollsystem (24) einnehmen kann. Deshalb nennen wir den  $\mathbb{R}^n$  auch den *Zustandsraum* des Systems (24).

Es ist leicht einzusehen, dass man Funktionen aus  $\mathcal{U}$  (komponentenweise) addieren und mit Skalaren multiplizieren kann ohne die Menge  $\mathcal{U}$  zu verlassen.<sup>14</sup> Das heißt,  $\mathcal{U}$  ist ein reeller Vektorraum mit diesen Operationen (Übungsaufgabe 1 auf Blatt 6).

**5.3 Lemma:** Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x, u) \mapsto \varphi(t; x, u)$ , hat folgende Eigenschaften:

(i) Für jedes  $t \geq 0$  ist folgende Abbildung linear:

$$(x, u) \mapsto \varphi(t; x, u), \quad \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

(ii) Für alle  $t, s \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathcal{U}$  gilt

$$\varphi(t + s; x, u) = \varphi(t; \varphi(s; x, u), u(\cdot + s)), \quad (26)$$

wobei  $u(\cdot + s) \in \mathcal{U}$  die durch  $t \mapsto u(t + s)$  definierte Kontrollfunktion ist.

**Beweis:** (i) Für beliebige  $(x, u), (y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t; x + \alpha y, u + \alpha v) &= e^{At}(x + \alpha y) + \int_0^t e^{A(t-s)}B(u(s) + \alpha v(s))ds \\ &= e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \alpha \left( e^{At}y + \int_0^t e^{A(t-s)}Bv(s)ds \right) \\ &= \varphi(t; x, u) + \alpha \varphi(t; y, v), \end{aligned}$$

womit die Linearität von  $\varphi(t; \cdot, \cdot)$  bewiesen ist.

(ii) Es ist klar, dass  $u(\cdot + s) \in \mathcal{U}$  für beliebige  $u \in \mathcal{U}$  und  $s \geq 0$  (siehe Übungsaufgabe 1 auf Blatt 6). Wir beweisen die Identität (26), indem wir zeigen, dass beide Seiten dasselbe Anfangswertproblem lösen, nämlich

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(s + t), \quad x(0) = \varphi(s; x, u).$$

<sup>14</sup> $(u + v)(t) := u(t) + v(t)$ ,  $(\alpha u)(t) := \alpha u(t)$  für  $u, v \in \mathcal{U}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Dazu seien  $\lambda(t) := \varphi(t+s; x, u)$  und  $\mu(t) := \varphi(t; \varphi(s; x, u), u(\cdot+s))$ ,  $\lambda, \mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ . An allen Stellen  $t$ , wo  $\lambda$  differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel

$$\dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Bu(t+s).$$

Ebenso gilt

$$\dot{\mu}(t) = A\mu(t) + Bu(t+s).$$

Da zudem  $\lambda(0) = \mu(0) = \varphi(s; x, u)$ , folgt (26) wegen der Eindeutigkeit von Lösungen.  $\square$

## 5.1 Kontrollierbarkeit

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Kontrollierbarkeitseigenschaften des linearen Kontrollsystems (24) ist die sogenannte *Kalman-Matrix* oder *Kontrollierbarkeitsmatrix*, die folgendermaßen aus  $A$  und  $B$  gebildet wird:

$$R[A, B] := [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}.$$

Das heißt  $R[A, B]$  entsteht, indem wir zuerst die Spalten der Matrix  $B$ , dann rechts davon die von  $AB$ , die von  $A^2B$  usw. bis  $A^{n-1}B$  aufschreiben.

**5.4 Lemma:** Für jedes  $t > 0$  ist  $\mathcal{R}_t(0)$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$  und es gilt  $\mathcal{R}_t(0) \subset \mathcal{R}_s(0)$  für  $t < s$ .

**Beweis:** Sind  $x, y \in \mathcal{R}_t(0)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so existieren  $u, v \in \mathcal{U}$  mit  $\varphi(t; 0, u) = x$  und  $\varphi(t; 0, v) = y$ , woraus mit Lemma 5.3(i) folgt, dass

$$\varphi(t; 0; u + \alpha v) = \varphi(t; 0, u) + \alpha \varphi(t; 0, v) = x + \alpha y,$$

und damit  $x + \alpha y \in \mathcal{R}_t(0)$ . Also ist  $\mathcal{R}_t(0)$  ein Untervektorraum.

Ist  $t < s$ , so gilt  $\mathcal{R}_t(0) \subset \mathcal{R}_s(0)$ , denn aus  $x = \varphi(t; 0, u)$  folgt mit

$$v(\tau) := \begin{cases} 0 & \text{für alle } \tau \in [0, s-t] \\ u(\tau - s + t) & \text{für alle } \tau \in (s-t, s] \\ 0 & \text{für alle } \tau > s \end{cases}$$

unter Verwendung von Lemma 5.3(ii), dass

$$\begin{aligned} \varphi(s; 0, v) &= \varphi((s-t) + t; 0, v) = \varphi(t; \varphi(s-t; 0, v), v(\cdot + s-t)) \\ &= \varphi(t; \varphi(s-t; 0, 0), u) = \varphi(t; 0, u) = x, \end{aligned}$$

(Idee: Bleibe zuerst im Punkt 0 bis zur Zeit  $s-t$  stehen durch Anwendung keiner Steuerung und schalte dann auf die Steuerung  $u$  um.)  $\square$

**5.5 Satz:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es existiert ein  $t > 0$  mit  $\mathcal{R}_t(0) = \mathbb{R}^n$ .

(ii) Für alle  $t > 0$  gilt  $\mathcal{R}_t(0) = \mathbb{R}^n$ .

(iii) Es gilt die **Kalman-Rangbedingung**

$$\operatorname{rg} R[A, B] = \operatorname{rg} [B | AB | A^2 B | \cdots | A^{n-1} B] = n,$$

d.h. die Matrix  $R[A, B]$  hat maximalen Rang.

**Beweis:** Es sei  $\langle A | \operatorname{im} B \rangle$  der kleinste  $A$ -invariante Untervektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , der das Bild der Matrix  $B$  enthält, d.h.  $A\langle A | \operatorname{im} B \rangle \subset \langle A | \operatorname{im} B \rangle$ ,  $\operatorname{im} B \subset \langle A | \operatorname{im} B \rangle$  und jeder echte Untervektorraum  $U \subset \langle A | \operatorname{im} B \rangle$  hat eine dieser beiden Eigenschaften nicht. Wir können  $\langle A | \operatorname{im} B \rangle$  auch definieren als  $\langle A | \operatorname{im} B \rangle := \bigcap_U U$ , wobei der Schnitt über alle  $A$ -invarianten Untervektorräume  $U$  gebildet wird, die  $\operatorname{im} B$  enthalten. Dass  $\langle A | \operatorname{im} B \rangle \neq \emptyset$  ergibt sich daraus, dass  $U = \mathbb{R}^n$  ein solcher Untervektorraum ist. Wir zeigen nun, dass

$$\langle A | \operatorname{im} B \rangle = \operatorname{im} B + A \operatorname{im} B + A^2 \operatorname{im} B + \cdots + A^{n-1} \operatorname{im} B. \quad (27)$$

Der Untervektorraum auf der rechten Seite enthält  $\operatorname{im} B$  und ist  $A$ -invariant, denn

$$\begin{aligned} A(\operatorname{im} B + A \operatorname{im} B + A^2 \operatorname{im} B + \cdots + A^{n-1} \operatorname{im} B) \\ = A \operatorname{im} B + A^2 \operatorname{im} B + \cdots + A^n \operatorname{im} B \end{aligned}$$

und  $A^n$  ist nach dem Satz von Caley-Hamilton<sup>15</sup> eine Linearkombination der Potenzen  $A^0, A^1, \dots, A^{n-1}$ . Andererseits muss jeder  $A$ -invariante Untervektorraum, der  $\operatorname{im} B$  enthält, natürlich auch

$$\operatorname{im} B + A \operatorname{im} B + A^2 \operatorname{im} B + \cdots + A^{n-1} \operatorname{im} B$$

enthalten. Damit ist (27) gezeigt.

Ist  $x = \varphi(t; 0, u) \in \mathcal{R}_t(0)$  für ein  $t > 0$ , so gilt für jedes  $s \geq 0$ , dass

$$e^{A(t-s)} B u(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t-s)^k A^k B u(s) \in \langle A | \operatorname{im} B \rangle,$$

wobei wir wieder den Satz von Caley-Hamilton verwenden und zusätzlich die Tatsache, dass Untervektorräume von  $\mathbb{R}^n$  topologisch abgeschlossen sind. Daraus folgt

$$x = \varphi(t; 0, u) = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \in \langle A | \operatorname{im} B \rangle,$$

was sich aus der Definition des Integrals als Grenzwert von Ober- oder Untersummen ergibt. Folglich gilt

$$\mathcal{R}_t(0) \subset \langle A | \operatorname{im} B \rangle \quad \text{für alle } t > 0.$$

<sup>15</sup>Zur Erinnerung: Der Satz von Caley-Hamilton besagt, dass  $\chi_A(A) = 0$ , wobei  $\chi_A$  das charakteristische Polynom von  $A$  ist. Das heißt, ist  $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_0$ , so gilt  $A^n = -(\alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A + \alpha_0 I)$ .

Wir zeigen nun, dass auch die umgekehrte Inklusion gilt. Dazu definieren wir für jedes  $t > 0$  die Matrix

$$W(t) := \int_0^t e^{As} B B^T e^{A^T s} ds \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und beweisen, dass  $\langle A | \text{im } B \rangle \subset \text{im } W(t)$ , oder äquivalent dazu,  $[\text{im } W(t)]^\perp \subset \langle A | \text{im } B \rangle^\perp$  für die orthogonalen Komplemente. Ist  $x \in [\text{im } W(t)]^\perp$ , so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= x^T W(t) x = \int_0^t x^T e^{As} B B^T e^{A^T s} x ds \\ &= \int_0^t (B^T e^{A^T s} x)^T \cdot (B^T e^{A^T s} x) ds = \int_0^t \|B^T e^{A^T s} x\|^2 ds. \end{aligned}$$

Da der Integrand stetig und an jeder Stelle  $s \in [0, t]$  nichtnegativ ist, folgt  $B^T e^{A^T s} x = 0$  für alle  $s \in [0, t]$ . Sukzessives Ableiten nach  $s$  und Auswerten der Ableitungen in  $s = 0$  ergibt

$$B^T (A^T)^k x = 0, \quad k \geq 1,$$

denn

$$\frac{d^k}{ds^k} B^T e^{A^T s} x = B^T (A^T)^k e^{A^T s} x.$$

Ist nun  $y = A^k B z$  für ein  $z \in \mathbb{R}^m$  und ein  $k \in \mathbb{N}$ , so folgt

$$\langle y, x \rangle = \langle A^k B z, x \rangle = (A^k B z)^T \cdot x = z^T B^T (A^T)^k x = 0.$$

Daraus folgt  $x \in \langle A | \text{im } B \rangle^\perp$ . Also haben wir bewiesen, dass

$$\mathcal{R}_t(0) = \langle A | \text{im } B \rangle \quad \text{für alle } t > 0.$$

Dies beweist insbesondere die Äquivalenz von (i) und (ii).

Um die Äquivalenz dieser beiden Bedingungen zu (iii) zu zeigen, müssen wir lediglich einsehen, dass

$$\langle A | \text{im } B \rangle = \text{im } R[A, B] = \text{im}[B | AB | A^2 B | \cdots | A^{n-1} B].$$

Dies sieht man daran, dass die Elemente von  $\text{im } R[A, B]$  offensichtlich genau die Summen  $x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$  mit  $x_i \in A^i \text{im } B$  sind.  $\square$

Folgendes Korollar ergibt sich unmittelbar.

**5.6 Korollar:** Die Erreichbarkeitsmenge  $\mathcal{R}_t(0)$  ist für jedes  $t > 0$  gegeben durch  $\mathcal{R}_t(0) = \text{im}[B | AB | A^2 B | \cdots | A^{n-1} B]$ .

Wir können nun mit Hilfe des obigen Satzes die Kontrollierbarkeit eines linearen Kontrollsystems charakterisieren, die wir im Folgenden zunächst formal definieren.

**5.7 Definition:** Das lineare Kontrollsystem (24) heißt **(vollständig) kontrollierbar**, falls für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  eine Zeit  $t \geq 0$  mit  $y \in \mathcal{R}_t(x)$  existiert.

**5.8 Definition:** Das Matrizenpaar  $(A, B)$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  heißt **kontrollierbar**, falls die Kalman-Rangbedingung  $\text{rg}R[A, B] = n$  erfüllt ist.

**5.9 Satz:** Das System (24) ist kontrollierbar genau dann, wenn  $(A, B)$  kontrollierbar ist.

**Beweis:** Aufgrund der Identität

$$\varphi(t; x, u) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds = e^{At}x + \varphi(t; 0, u)$$

ist  $\mathcal{R}_t(x) = e^{At}x + \mathcal{R}_t(0)$ . Ist also  $(A, B)$  kontrollierbar, so folgt aus Satz 5.5, dass  $\mathcal{R}_t(x) = \mathbb{R}^n$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $t > 0$ . Sind nun  $x, y \in \mathbb{R}^n$  beliebig gegeben, so gilt wegen  $\mathcal{R}_t(x) = \mathbb{R}^n$ , dass ein  $u \in \mathcal{U}$  existiert mit  $\varphi(t; x, u) = y$ . Ist umgekehrt (24) kontrollierbar, so existiert insbesondere zu jedem  $x \in \mathbb{R}^n$  ein  $t \geq 0$  mit  $x \in \mathcal{R}_t(0)$ . Da  $\mathcal{R}_t(0) = \text{im}R[A, B]$  für alle  $t > 0$ , folgt daraus  $\text{im}R[A, B] = \mathbb{R}^n$ . Also ist die Kalman-Rangbedingung erfüllt und  $(A, B)$  ist kontrollierbar.  $\square$

**5.10 Beispiel:** Wir betrachten ein skalares Kontrollsystem mit skalaren Eingängen, also

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Da  $n = m = 1$ , reduziert sich die Kalman-Matrix in diesem Fall auf die  $1 \times 1$ -Matrix  $[b]$ . Folglich ist das System genau dann kontrollierbar, wenn  $b \neq 0$ , wenn man den Zustand  $x(t)$  also überhaupt durch die Steuerung  $u(t)$  beeinflussen kann.  $\diamond$

**5.11 Beispiel:** Wir betrachten das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=:B} u(t).$$

Die Kalman-Matrix ist gegeben durch

$$R[A, B] = [B|AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

die, wie man unmittelbar sieht, zwei linear unabhängige Spalten und damit Rang 2 hat. Also ist das System vollständig kontrollierbar.

Nun betrachten wir das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

In diesem Fall ist die Kalman-Matrix

$$R[A, B] = [B|AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da die zweite Spalte ein Vielfaches der ersten ist, hat die Matrix nur Rang 1. Folglich ist das System nicht vollständig kontrollierbar.  $\diamond$

Uns interessiert auch der Fall, dass  $(A, B)$  die Kalman-Rangbedingung nicht erfüllt. Wie der folgende Satz zeigt, können wir dann das gegebene System in einen kontrollierbaren und einen unkontrollierbaren Teil zerlegen. Dazu führen wir zunächst eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Matrizenpaare  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$  ein:

**5.12 Definition:** Zwei Paare  $(A, B)$  und  $(A', B')$  in  $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$  heißen **ähnlich**, falls eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert, so dass

$$T^{-1}AT = A' \quad \text{und} \quad T^{-1}B = B'.$$

**5.13 Satz:** Sind  $(A, B)$  und  $(A', B')$  ähnlich, so ist  $(A, B)$  genau dann kontrollierbar, wenn  $(A', B')$  kontrollierbar ist.

**Beweis:** Übungsaufgabe 1 auf Blatt 7.  $\square$

Nun beweisen wir den Satz über die Zerlegung eines Systems in einen kontrollierbaren und einen unkontrollierbaren Teil.

**5.14 Satz:** Für alle  $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$  existiert eine reelle invertierbare  $n \times n$ -Matrix  $T$ , so dass

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $(A_{11}, B_1)$  ein kontrollierbares Paar ist. Dabei sind  $A_{11} \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ ,  $0 \leq n' \leq n$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n' \times m}$ ,  $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-n') \times (n-n')}$ .

**Beweis:** Sei  $n' := \dim\langle A | \text{im } B \rangle$ . Wir wählen eine Basis  $\{v_1, \dots, v_{n'}\}$  von  $\langle A | \text{im } B \rangle$  und ergänzen diese zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_{n'}, v_{n'+1}, \dots, v_n\}$  des  $\mathbb{R}^n$ . Die Matrix  $T$  sei die Matrix mit den Spalten  $v_1, \dots, v_n$ , deren Invertierbarkeit aus der Tatsache folgt, dass  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis ist. Wir zeigen zunächst, dass  $T^{-1}AT$  die gewünschte Blockstruktur hat. Dazu seien  $n' < i \leq n$  und  $1 \leq j \leq n'$ . Dann gilt

$$(T^{-1}AT)_{ij} = e_i^T T^{-1}AT e_j = e_i^T T^{-1}A v_j.$$

Da  $v_j \in \langle A | \text{im } B \rangle$  und  $\langle A | \text{im } B \rangle$   $A$ -invariant ist, gilt  $Av_j = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k v_k$  für gewisse  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ . Damit folgt<sup>16</sup>

$$(T^{-1}AT)_{ij} = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k e_i^T T^{-1}v_k = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k e_i^T e_k = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k \delta_{ik} = 0,$$

also hat  $T^{-1}AT$  die gewünschte Struktur. Mit  $n' < i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  gilt  $Be_j \in \langle A | \text{im } B \rangle$ , also  $Be_j = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k e_k$  für gewisse  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  und daher

$$e_i^T T^{-1}Be_j = e_i^T T^{-1} \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k e_i^T e_k = \sum_{k=1}^{n'} \alpha_k \delta_{ik} = 0.$$

Folglich hat auch  $T^{-1}B$  die gewünschte Struktur. Da

$$\begin{aligned} \langle T^{-1}AT | T^{-1}B \rangle &= \text{im } T^{-1}B + \text{im } T^{-1}AB + \dots + \text{im } T^{-1}A^{n-1}B \\ &= T^{-1} \langle A | \text{im } B \rangle = \langle e_1, \dots, e_n' \rangle, \end{aligned}$$

ist das Paar  $(A_{11}, B_1)$  kontrollierbar. □

Beachte, dass das charakteristische Polynom einer Matrix sich bei einer linearen Koordinatentransformation nicht verändert. Es gilt also

$$\chi_A(\lambda) = \chi_{A_{11}}(\lambda) \chi_{A_{22}}(\lambda).$$

Wir nennen  $\chi_{A_{11}}$  den *kontrollierbaren* und  $\chi_{A_{22}}$  den *unkontrollierbaren Teil* des charakteristischen Polynoms von  $A$ . (Noch zu zeigen: Diese Zerlegung ist unabhängig von der Wahl der Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , die wir in obigem Beweis verwendet haben, siehe Übungsaufgabe 3 auf Blatt 8.) Diejenigen Eigenwerte von  $A$ , die Nullstellen von  $\chi_{A_{11}}$  sind, nennen wir *kontrollierbare Eigenwerte*, diejenigen, die Nullstellen von  $\chi_{A_{22}}$  sind, *unkontrollierbare Eigenwerte*.

Aus dem Beweis von Satz 5.14 können wir folgendes Rezept zur Zerlegung eines Systems in einen kontrollierbaren und einen unkontrollierbaren Teil ablesen:

1. Schritt: Berechne die Kalman-Matrix  $R[A, B] = [B | AB | \dots | A^{n-1}B]$ .
2. Schritt: Bestimme den Rang  $n'$  von  $R[A, B]$  (zum Beispiel mit Hilfe des Gauß-Algorithmus).
3. Schritt: Berechne eine Basis  $\{v_1, \dots, v_{n'}\}$  von  $\text{im } R[A, B] = \langle A | \text{im } B \rangle$  (zum Beispiel mit dem Gauß-Algorithmus).
4. Schritt: Ergänze die Basis aus dem vorherigen Schritt zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  des  $\mathbb{R}^n$  und definiere  $T := [v_1 | v_2 | \dots | v_n]$ .
5. Schritt: Berechne die Inverse  $T^{-1}$  von  $T$ .
6. Schritt: Berechne  $A' := T^{-1}AT$  und  $B' := T^{-1}B$ .

<sup>16</sup>Hier verwenden wir die Beziehung  $e_i^T e_k = \langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}$  für die Einheitsvektoren  $e_1, \dots, e_n$ , wobei  $\delta_{ik} = 1$  für  $i = k$  und  $\delta_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ .

7. Schritt: Lese die Matrizen  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  und  $B_1$  von  $A'$  und  $B'$  ab.

Unter Verwendung von Satz 5.14 können wir noch ein weiteres Kriterium für die Kontrollierbarkeit von  $(A, B)$  beweisen, das sogenannte *Hautus-Kriterium*.

**5.15 Satz:** Für das lineare Kontrollsystem (24) sind äquivalent:

- (i)  $(A, B)$  ist kontrollierbar.
- (ii)  $\text{rg}[\lambda I - A|B] = n$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .<sup>17</sup>
- (iii)  $\text{rg}[\lambda I - A|B] = n$  für alle Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $A$ .

**Beweis:** Die Implikation „(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“ ist trivial.

„(iii)  $\Rightarrow$  (ii)“: Es sei  $\lambda$  kein Eigenwert von  $A$ . Dann ist  $\lambda I - A$  invertierbar, woraus  $\text{rg}[A - \lambda I|B] \geq \text{rg}[A - \lambda I] = n$  folgt.

„(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Wir nehmen an, dass (i) gilt, aber (ii) nicht und führen dies zu einem Widerspruch. Weil (ii) nicht gilt, existiert ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ , so dass  $\text{rg}[\lambda I - A|B] < n$ . Also existiert ein  $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$  mit  $p^T[\lambda I - A|B] = 0$ , d.h.

$$p^T A = \lambda p^T \quad \text{und} \quad p^T B = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $p^T A^k = \lambda^k p^T$  und damit insgesamt

$$p^T A^k B = 0 \quad \text{für alle } k \geq 0.$$

Also gilt  $p^T[B|AB|\dots|A^{n-1}B] = 0$ , woraus  $\text{rg}R[A, B] < n$  folgt im Widerspruch zur Kontrollierbarkeit von  $(A, B)$ .

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“: Wir nehmen an, dass (ii) gilt und (i) nicht und führen dies zu einem Widerspruch. Da (i) nicht gilt, existiert nach Satz 5.14 eine Zerlegung

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit  $A_{11} \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$  und  $n' < n$ . Sei nun  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A_{22}^T$  zum Eigenvektor  $v$ . Dann gilt  $v^T(\lambda I - A_{22}) = 0$ . Damit gilt für  $w^T = [0, v^T] \in \mathbb{R}^n$ , dass

$$w^T(\lambda I - \tilde{A}) = \begin{bmatrix} 0^T(\lambda I - A_{11}) & 0^T(-A_{12}) \\ v^T 0 & v^T(\lambda I - A_{22}) \end{bmatrix} = 0,$$

$$w^T \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0^T B_{11} \\ v^T 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Mit  $p^T := w^T T^{-1} \neq 0$  folgt dann

$$p^T[\lambda I - A|B] = w^T T^{-1}[\lambda I - A|B] = [w^T(\lambda I - \tilde{A})T^{-1}|w^T \tilde{B}] = 0$$

im Widerspruch zu (ii). □

<sup>17</sup>Beachte, dass  $[\lambda I - A|B] \in \mathbb{C}^{n \times (n+m)}$ .

**5.16 Beispiel:** Wir betrachten das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:B} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}.$$

Die Kalman-Matrix ist gegeben durch

$$R[A, B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Man sieht, dass jede Spalte ein Vielfaches der ersten oder zweiten Spalte ist. Damit hat  $W$  nur Rang 2 und es folgt, dass das System nicht vollständig kontrollierbar ist. Um das System auf eine einfachere Gestalt zu bringen, bestimmen wir eine Transformationsmatrix  $T$  wie in Satz 5.14. Eine Basis  $\{v_1, v_2\}$  von  $\text{im } R[A, B] = \langle A | \text{im } B \rangle$  ist durch die ersten beiden Spalten von  $R[A, B]$  gegeben. Erweitern zu einer Basis von  $\mathbb{R}^3$  liefert zum Beispiel

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und wir erkennen die gesuchte Blockstruktur mit

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = [0], \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Kalman-Matrix von  $(A_{11}, B_1)$  ergibt sich zu

$$R[A_{11}, B_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

und hat, wie erwartet, Rang 2. ◇

## 5.2 Feedback und Stabilisierung

Wir wollen uns nun der Frage zuwenden, wie man die triviale Ruhelage  $x_* = 0$  eines linearen Systems  $\dot{x} = Ax$  asymptotisch stabil machen kann mit Hilfe einer Steuerung, die zur rechten Seite der Differentialgleichung addiert wird. Wir betrachten also wieder ein lineares Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Wie wir in Übungsaufgabe 3 auf Blatt 7 sehen, ist es i.A. keine gute Idee, zur Stabilisierung eine zeitabhängige Steuerung  $u(t)$  im Voraus zu berechnen. Wir machen daher im Folgenden einen anderen Ansatz. Wir wählen eine Steuerung, die zu jeder Zeit  $t$  vom aktuellen Zustand  $x(t)$  linear abhängt, also  $u(t) = Fx(t)$  für ein  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Die Matrix  $F$  bzw. die zugehörige lineare Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $x \mapsto Fx$ , nennen wir *Feedback* oder *Rückkopplung*. Das so entstehende System hat die Form

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t),$$

es handelt sich also um eine lineare homogene Differentialgleichung, auf die wir die zuvor entwickelte Stabilitätstheorie anwenden können.

Um nun einen Zustand nach  $x_* = 0$  zu steuern und ihn dort zu halten, können wir versuchen, das folgende Stabilisierungsproblem zu lösen.

**5.17 Definition:** Gegeben sei ein lineares Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{28}$$

mit Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Das **(Feedback-) Stabilisierungsproblem** für (28) besteht darin, eine Matrix  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  zu finden, so dass die triviale Ruhelage der linearen Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

asymptotisch stabil ist.

Wir betrachten zunächst Systeme mit skalarer Kontrolle (auch *Single-Input-Systeme* genannt). In diesem Fall ist also  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , d.h.  $B$  ist ein Spaltenvektor in  $\mathbb{R}^n$ . Um dies deutlich zu machen, schreiben wir im Folgenden  $b$  statt  $B$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t). \tag{29}$$

Der folgende Satz charakterisiert die Kontrollierbarkeit solcher Systeme.

**5.18 Satz:** Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Das Paar  $(A, b)$  ist genau dann kontrollierbar, wenn es eine invertierbare Matrix  $S$  gibt, so dass

$$\tilde{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = S^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

wobei die Zahlen  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind, d.h.  $\chi_A(\lambda) = \lambda^n - \alpha_n \lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_2 \lambda - \alpha_1$ .

**Beweis:** Zuerst zeigen wir, dass für Matrizen der Form  $\tilde{A}$  wie in der Formulierung des Satzes die Einträge  $\alpha_i$  gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms sind. Dies ergibt sich mit vollständiger Induktion. Für  $n = 1$  ist das klar, denn in diesem Fall ist  $\tilde{A} = [\alpha_1]$ . Für den Induktionsschritt sei  $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  von obiger Form und  $A_{n+1} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  gegeben durch

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_n & \\ \alpha_0 & & & \end{bmatrix}.$$

Entwickeln wir die Determinante  $\det[\lambda I - A_{n+1}]$  nach der ersten Spalte, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_{A_{n+1}}(\lambda) &= \lambda \cdot \chi_{A_n}(\lambda) + (-1)^{n+2}(-\alpha_0) \cdot \det(-I_{n \times n}) \\ &= (\lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_1\lambda) - (-1)^{2n+2}\alpha_0 \\ &= \lambda^n - \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - \alpha_1\lambda - \alpha_0, \end{aligned}$$

also nach Umnummerierung der  $\alpha_i$  gerade den gewünschten Ausdruck.

Wir nehmen nun an, dass  $S$  existiert. Durch Nachrechnen ergibt sich

$$R[\tilde{A}, \tilde{b}] = [\tilde{b}|\tilde{A}\tilde{b}|\cdots|\tilde{A}^{n-1}\tilde{b}] = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

wobei  $*$  für einen beliebigen Eintrag steht. Diese Matrix hat offensichtlich vollen Rang, also ist  $(\tilde{A}, \tilde{b})$  und damit (nach Satz 5.13)  $(A, b)$  kontrollierbar.

Nun sei umgekehrt  $(A, b)$  kontrollierbar. Dann hat  $R := R[A, b] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vollen Rang  $n$  und ist folglich invertierbar. Wir zeigen zunächst, dass  $R^{-1}AR = \tilde{A}^T$  ist, oder äquivalent dazu,  $AR = R\tilde{A}^T$ . Dies folgt unter Verwendung des Satzes von Caley-Hamilton aus

$$\begin{aligned} AR &= A[b|Ab|\cdots|A^{n-1}b] = [Ab|A^2b|\cdots|A^n b] \\ &= [Ab|A^2b|\cdots|\alpha_n A^{n-1}b + \cdots + \alpha_2 Ab + \alpha_1 b] \\ &= [b|Ab|\cdots|A^{n-1}b] \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{bmatrix} = R\tilde{A}^T. \end{aligned}$$

Mit  $\tilde{R} := R[\tilde{A}, \tilde{b}]$  folgt mit analoger Rechnung die Gleichung  $\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{R} = \tilde{A}^T$  und damit

$$\tilde{A} = \tilde{R}\tilde{A}^T\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}R^{-1}AR\tilde{R}^{-1}.$$

Aus den Definitionen von  $R$  und  $\tilde{R}$  folgt  $R \cdot [1, 0, \dots, 0]^T = b$  und  $\tilde{R} \cdot [1, 0, \dots, 0]^T = \tilde{b}$ , also  $R\tilde{R}^{-1}\tilde{b} = b$ . Es ergibt sich also  $S = R\tilde{R}^{-1}$  als die gesuchte Transformation.  $\square$

Die durch obigen Satz gegebene Form der Matrizen  $\tilde{A}$  und  $\tilde{b}$  wird auch *Regelungsnormalform* genannt. Beachte, dass sich die Koordinatentransformation  $S$  allein durch Kenntnis von  $A$ ,  $b$  und den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von  $A$  berechnen lässt.

Nun gehen wir das Stabilisierungsproblem für den Fall  $m = 1$  an.

**5.19 Definition:** Betrachte das lineare Kontrollsystem (24). Ein Polynom  $\chi$  heißt **vorgebbar (für  $(A, B)$ )**, falls ein Feedback  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert, so dass  $\chi = \chi_{A+BF}$ .

Mit dieser Definition können wir sofort folgendes Lemma formulieren. (Hier geht natürlich Satz 3.2 ein.)

**5.20 Lemma:** Das Stabilisierungsproblem für das lineare Kontrollsystem (24) ist genau dann lösbar, falls ein vorgegbares Polynom existiert, dessen Nullstellen alle negativen Realteil haben.

Wie der folgende Satz zeigt, ist die Kontrollierbarkeit von  $(A, b)$  äquivalent dazu, dass jedes normierte Polynom<sup>18</sup> ist  $n$ -ten Grades vorgebbar ist.

**5.21 Satz:** Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das Paar  $(A, b)$  ist kontrollierbar.
- (ii) Jedes Polynom der Form  $\chi(\lambda) = \lambda^n - \beta_n \lambda^{n-1} - \dots - \beta_2 \lambda - \beta_1$  mit  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  ist vorgebbar.

**Beweis:** „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Sei  $(A, b)$  kontrollierbar und sei  $S$  die Matrix aus Satz 5.18. Wir setzen

$$\tilde{F} := [\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2, \dots, \beta_n - \alpha_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{bmatrix}.$$

Aus der zweiten Aussage von Satz 5.18 folgt, dass  $\chi_{\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{F}} = \chi$ . Also ist  $F := \tilde{F}S^{-1}$  das gesuchte Feedback, denn

$$A + bF = S\tilde{A}S^{-1} + S\tilde{b}\tilde{F}S^{-1} = S(\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{F})S^{-1}$$

<sup>18</sup>Zur Erinnerung: Ein normiertes Polynom ist ein Polynom, dessen führender Koeffizient gleich 1 ist, also  $\chi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ .

und das charakteristische Polynom einer Matrix ist invariant unter linearen Koordinatentransformationen.

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“: Wir nehmen an, (i) gelte nicht. Sei also  $(A, b)$  nicht kontrollierbar. Sei  $T$  die Transformation aus Satz 5.14. Dann ergibt sich für jedes beliebige Feedback  $\tilde{F} = [F_1, F_2]$  mit  $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n'}$ , dass

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{F} = \begin{bmatrix} A_{11} + b_1 F_1 & A_{12} + b_1 F_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom dieser Matrix gilt

$$\chi_{\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{F}} = \chi_{A_{11} + b_1 F_1} \cdot \chi_{A_{22}}.$$

Daher sind die vorgebbaren Polynome alle von der Form  $\chi \cdot \chi_{A_{22}}$ , wobei  $\chi$  ein beliebiges normiertes Polynom vom Grad  $n'$  ist. Da  $n' < n$ , sind also nicht alle Polynome vorgebar und (ii) gilt nicht.  $\square$

Aus dem Beweis des obigen Satzes erhalten wir sofort ein Stabilisierbarkeitskriterium für Systeme mit eindimensionaler Kontrolle.

**5.22 Satz:** *Das Stabilisierungsproblem für das lineare Kontrollsystem (29) ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte von  $A_{22}$  aus Satz 5.14 negativen Realteil haben.*

**Beweis:** Wir dürfen annehmen, dass das Paar  $(A, b)$  die Blockstruktur aus Satz 5.14 hat. Wie im Beweis der vorhergehenden Satzes ergibt sich dann für jedes Feedback  $F = [F_1, F_2]$ , dass

$$\chi_{A + bF} = \chi_{A_{11} + b_1 F_1} \cdot \chi_{A_{22}}.$$

Nach Satz 5.21 können wir durch geeignete Wahl von  $F_1$  das Polynom  $\chi_{A_{11} + b_1 F_1}$  beliebig vorgeben. Daraus folgt unmittelbar die Aussage des Satzes.  $\square$

**5.23 Definition:** *Falls das Stabilisierungsproblem für das lineare Kontrollsystem (24) lösbar ist, nennen wir  $(A, B)$  stabilisierbar.*

Nun können wir das Stabilisierungsproblem für beliebige Werte von  $m$  angehen, indem wir es auf den Fall  $m = 1$  zurückführen. Dabei hilft uns folgendes Lemma, das als *Heymann's Lemma* bekannt ist:

**5.24 Lemma:** *Betrachte das lineare Kontrollsystem (24). Das Paar  $(A, B)$  sei kontrollierbar. Sei  $v \in \mathbb{R}^m$  ein Vektor mit  $\bar{b} := Bv \neq 0$ .<sup>19</sup> Dann gibt es eine Matrix  $\bar{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , so dass das Kontrollsystem*

$$\dot{x}(t) = (A + B\bar{F})x(t) + \bar{b}\bar{u}(t)$$

*mit eindimensionaler Kontrolle  $\bar{u}(t)$  kontrollierbar ist.*

<sup>19</sup>Ein solches  $v$  existiert, da andernfalls  $B$  die Nullmatrix wäre im Widerspruch zur Kontrollierbarkeit.

**Beweis:** Wir konstruieren linear unabhängige Vektoren  $x_1, \dots, x_n$ , so dass

$$x_1 := \bar{b} \quad \text{und} \quad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

für gewisse  $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ . Wir gehen dazu induktiv vor. Zunächst stellen wir fest, dass  $x_1 \neq 0$ . Also ist  $\{x_1\}$  linear unabhängig. Nun nehmen wir an, dass wir  $x_1, \dots, x_k$  für ein  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  mit obiger Eigenschaft bereits konstruiert haben und definieren den Untervektorraum  $V_k := \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ . Wir müssen zeigen, dass es ein  $u_k \in \mathbb{R}^m$  gibt mit  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \notin V_k$ . Wir machen dazu die Widerspruchannahme, dass  $Ax_k + Bu \in V_k$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$ . Insbesondere gilt also  $Ax_k \in V_k$ . Damit folgt  $Bu = (Ax_k + Bu) - Ax_k \in V_k$  für alle  $u \in \mathbb{R}^m$ , also

$$\text{im } B \subset V_k.$$

Weiter gilt

$$Ax_{k-1} = x_k - Bu_k \in V_k, \quad Ax_{k-2} = x_{k-1} - Bu_{k-1} \in V_k, \dots, Ax_1 \in V_k.$$

Also ist  $V_k$  ein  $A$ -invarianter Unterraum, der das Bild von  $B$  enthält, woraus  $\langle A | \text{im } B \rangle \subset V_k$  folgt. Da  $(A, B)$  nach Voraussetzung kontrollierbar ist, gilt  $\langle A | \text{im } B \rangle = \mathbb{R}^n$ , also  $V_k = \mathbb{R}^n$ . Dies kann nur der Fall sein, wenn  $k = n$  im Widerspruch zu  $k < n$ .

Wir konstruieren nun die gesuchte Matrix  $\bar{F}$  aus den Vektoren  $x_1, \dots, x_n$ . Da diese linear unabhängig sind, ist die Matrix  $X := [x_1 | x_2 | \dots | x_n]$  invertierbar und wir können  $\bar{F} := UX^{-1}$  für  $U := [u_1 | u_2 | \dots | u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definieren, wobei wir  $u_n := 0$  setzen. Damit gilt  $\bar{F}x_i = u_i$  für  $i = 1, \dots, n$  und deshalb  $(A + B\bar{F})x_i = x_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ . Wegen  $\bar{b} = x_1$  folgt somit

$$R[A + B\bar{F}, \bar{b}] = [\bar{b} | (A + B\bar{F})\bar{b} | \dots | (A + B\bar{F})^{n-1}\bar{b}] = X,$$

also ist  $(A + B\bar{F}, \bar{b})$  kontrollierbar. □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun die Sätze 5.21 und 5.22 auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

**5.25 Satz:** Für ein Paar  $(A, B)$  mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sind äquivalent:

- (i)  $(A, B)$  ist kontrollierbar.
- (ii) Jedes Polynom der Form  $\chi(\lambda) = \lambda^n - \beta_n \lambda^{n-1} - \dots - \beta_2 \lambda - \beta_1$  mit  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  ist vorgebbar.

**Beweis:** „(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Sei  $(A, B)$  kontrollierbar und  $\chi$  gegeben. Seien  $\bar{F}$  und  $\bar{b}$  die Matrizen aus Heymann's Lemma für ein  $v \in \mathbb{R}^m$  mit  $Bv \neq 0$ . Dann ist das Paar  $(A + B\bar{F}, \bar{b})$  kontrollierbar und es existiert nach Satz 5.21 ein Feedback  $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , so dass

$$\chi_{A+B\bar{F}+\bar{b}F_1} = \chi.$$

Wegen

$$A + B\bar{F} + \bar{b}F_1 = A + B(\bar{F} + vF_1)$$

ist also  $\bar{F} + vF_1$  das gesuchte Feedback.

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“: Völlig analog zum Beweis von Satz 5.21.  $\square$

Nun können wir die Lösung des Stabilisierungsproblems für ein allgemeines lineares Kontrollsystem formulieren.

**5.26 Satz:** *Das Stabilisierungsproblem für das lineare Kontrollsystem (24) ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte von  $A_{22}$  aus Satz 5.14 negativen Realteil haben.*

**Beweis:** Völlig analog zum Beweis von Satz 5.22.  $\square$

**5.27 Bemerkung:** Satz 5.26 wird auch als *Polverschiebungssatz* bezeichnet, da die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in der Regelungstechnik „Pole“ genannt werden (dies hat zu tun mit alternativen Darstellungen linearer Kontrollsysteme über sogenannte Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich) und dieser Satz etwas darüber aussagt, wie man diese Nullstellen durch geeignete Wahl des Feedbacks „verschieben“ kann.

Als Rezept zur Lösung des Stabilisierungsproblems für konkret gegebene Matrizen  $A$  und  $B$  bietet sich folgendes Vorgehen an:

1. Schritt: Berechne die Einträge der Matrix  $A+BF$  für eine beliebige Feedback-Matrix  $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

2. Schritt: Berechne das charakteristische Polynom  $\chi_{A+BF}$ , dessen Koeffizienten von den Einträgen  $f_{ij}$  abhängen.

3. Schritt: Berechne die Koeffizienten  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  eines Polynoms  $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ , dessen Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  negative Realteile haben.

4. Schritt: Setze das Polynom  $\chi$  mit dem Polynom  $\chi_{A+BF}$  gleich und bestimme eine Lösung  $(f_{ij})$  des Gleichungssystems, das durch Koeffizientenvergleich entsteht. Jede Lösung dieses Systems liefert ein stabilisierendes Feedback.

### 5.3 Steuerung mit minimaler Energie

Wenn wir ein vollständig kontrollierbares System vorliegen haben, wissen wir, dass wir das System von jedem Zustand  $x$  zu jedem anderen Zustand  $y$  in einer beliebigen Zeit  $t > 0$  steuern können, also  $y = \varphi(t; x, u)$  für ein  $u \in \mathcal{U}$ . Im Allgemeinen gibt es sehr viele Kontrollfunktionen, die dafür in Frage kommen. Meistens möchte man jedoch zusätzlich eine Größe minimieren. Interpretieren wir  $u(t)$  als Geschwindigkeit oder Impuls, so ist das Integral

$$\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds,$$

ein Maß für die Energie, wobei  $\|\cdot\|_2$  die Euklidische Standardnorm im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet, also

$$\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^m u_i^2, \quad \text{falls } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Wir werden im Folgenden die Steuerung charakterisieren, die einen Zustand in einen anderen mit minimaler Energie überführt.

**5.28 Definition:** Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Dann definieren wir für jedes  $t > 0$  die **Kontrollierbarkeitsgramm**

$$W(t) := \int_0^t e^{As} B B^T e^{A^T s} ds. \quad (30)$$

Wie man leicht sieht, ist der Integrand in (30) für jedes  $s \geq 0$  eine symmetrische Matrix. Daher ist auch  $W(t)$  symmetrisch. Zudem ist  $W(t)$  positiv semi-definit, denn

$$x^T W(t) x = \int_0^t x^T e^{As} B B^T e^{A^T s} x ds = \int_0^t \|B^T e^{A^T s} x\|_2^2 ds \geq 0.$$

Beachte: Wir haben die Matrix  $W(t)$  bereits im Beweis von Satz 5.5 verwendet.

**5.29 Satz:** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $(A, B)$  ist kontrollierbar.
- (ii) Für alle  $t > 0$  ist  $W(t)$  positiv definit.
- (iii) Es existiert kein  $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$ , so dass  $\langle p, e^{As} b_i \rangle = 0$  für alle  $s \in [0, t]$  und  $i = 1, \dots, m$ , wobei  $b_i := B e_i$ .

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so ist die Funktion

$$u(s) := B^T e^{A^T(t-s)} W(t)^{-1} (y - e^{At} x), \quad s \in [0, t],$$

die eindeutige Kontrollfunktion, die das Integral

$$\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$$

unter der Nebenbedingung  $\varphi(t; x, u) = y$  minimiert.

**Beweis:** „(ii)  $\Rightarrow$  (iii)“: (iii) gelte nicht. Dann existiert ein  $0 \neq p \in \mathbb{R}^n$  mit  $\langle p, e^{As} b_i \rangle = 0$  für alle  $s \in [0, t]$  und  $i = 1, \dots, m$ , woraus folgt, dass

$$p^T W(t) p = \int_0^t \underbrace{p^T e^{As} B}_{=0} B^T e^{A^T s} p ds = 0.$$

Also ist  $W(t)$  nicht positiv definit und (ii) gilt nicht.

„(iii)  $\Rightarrow$  (i)“: (i) gelte nicht. Dann existiert  $0 \neq p$  mit  $p^T R[A, B] = 0$ , woraus  $p^T A^k B = 0$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$  folgt. Mit dem Satz von Caley-Hamilton folgt  $p^T A^k B = 0$  für alle  $k \geq 0$  und damit auch  $p^T e^{As} B = 0$  für alle  $s \geq 0$ . Dies ist äquivalent zu  $p^T e^{As} B e_i = \langle p, e^{As} b_i \rangle = 0$  für  $s \geq 0$  und  $i = 1, \dots, m$ . Also gilt (iii) nicht.

„(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Im Beweis von Satz 5.5 haben wir gesehen, dass  $\langle A | \text{im } B \rangle \subset \text{im } W(t)$ . Ist  $(A, B)$  kontrollierbar, so folgt daraus  $\text{im } W(t) = \mathbb{R}^n$ . Daraus folgt, dass  $W(t)$  invertierbar ist, also alle Eigenwerte von  $W(t)$  verschieden von Null sind. Da  $W(t)$  positiv semi-definit ist, folgt daraus, dass alle Eigenwerte positiv sind. Also gilt (ii).

Wir haben die Äquivalenz von (i)–(iii) gezeigt. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t; x, u) &= e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} W(t)^{-1} (y - e^{At} x) ds \\ &= e^{At} x + \int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} ds W(t)^{-1} (y - e^{At} x) \\ &= e^{At} x - \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau W(t)^{-1} (y - e^{At} x) \\ &= e^{At} x + W(t) W(t)^{-1} (y - e^{At} x) = y. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir eine Kontrollfunktion der Form  $\hat{u}(s) = u(s) + v(s)$ , die  $\varphi(t; x, \hat{u}) = y$  erfüllt. Daraus folgt mit der Linearität von  $\varphi(t; \cdot, \cdot)$  (Lemma 5.3), dass

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{A(t-s)} B v(s) ds &= \varphi(t; 0, v) = \varphi(t; x - x; \hat{u} - u) \\ &= \varphi(t; x; \hat{u}) - \varphi(t; x, u) = y - y = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle u(s), v(s) \rangle ds &= \int_0^t \langle B^T e^{A^T(t-s)} W(t)^{-1} (y - e^{At} x), v(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle W(t)^{-1} (y - e^{At} x), e^{A(t-s)} B v(s) \rangle ds \\ &= \left\langle W(t)^{-1} (y - e^{At} x), \int_0^t e^{A(t-s)} B v(s) ds \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Dies schließlich führt zu

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\hat{u}(s)\|_2^2 ds &= \int_0^t \langle u(s) + v(s), u(s) + v(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle u(s), u(s) \rangle ds + 2 \int_0^t \langle u(s), v(s) \rangle ds + \int_0^t \langle v(s), v(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \|v(s)\|_2^2 ds \geq \int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds. \end{aligned}$$

Also minimiert  $u$  das Integral  $\int_0^t \|u(s)\|_2^2 ds$ . Die Eindeutigkeit ist klar, denn für  $v \neq 0$  ist das Integral über  $\|v(s)\|_2^2$  positiv.<sup>20</sup>  $\square$

**5.30 Beispiel:** Wir betrachten das durch

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u(t)$$

gegebene System, das ein linearisiertes Pendel ohne Reibung beschreibt („harmonischer Oszillator“).<sup>21</sup> Wir wollen den Zustand

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

in der Zeit  $T = 2\pi$  nach  $y = [0, 0]^T$  überführen mit minimaler Energie

$$\int_0^{2\pi} \|u(s)\|_2^2 ds.$$

Es gilt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Für die Kontrollierbarkeitsgrammische erhalten wir damit

$$\begin{aligned} W(2\pi) &= \int_0^{2\pi} e^{sA} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0, 1] e^{sA^T} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin^2(s) & \sin(s)\cos(s) \\ \sin(s)\cos(s) & \cos^2(s) \end{bmatrix} ds = \pi I. \end{aligned}$$

Es folgt

$$W(2\pi)^{-1}(y - e^{2\pi A}x) = -\frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die gesuchte Kontrollfunktion ist also gegeben durch

$$u(t) = -\frac{1}{\pi} [0, 1] \cdot e^{A(t-2\pi)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi} \sin(t).$$

$\diamond$

## 5.4 Beobachtbarkeit

In der Praxis ist es oft so, dass der Regler eines Systems nicht den gesamten Zustand  $x(t)$  zur Wahl eines Feedbacks zur Verfügung hat, sondern nur einen Teil

<sup>20</sup>Dies gilt zumindest für stetige Funktionen  $v$ . Für stückweise stetige Funktionen kann das Integral über  $\|v(s)\|_2^2$  auch Null sein, wenn  $v$  an den Unstetigkeitsstellen Werte verschieden von Null annimmt. Solche Funktionen identifizieren wir aber mit der Nullfunktion.

<sup>21</sup>Die physikalischen Konstanten haben wir alle gleich 1 gesetzt.

des Zustands, d.h. einen Vektor  $y(t) = Cx(t)$ , wobei  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . Wir betrachten deshalb im Folgenden lineare Kontrollsysteme mit *Ausgang* der Form<sup>22</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \tag{31}$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ .

Die wichtigste Frage ist, wieviel Information der Ausgang  $y(t)$  über den Zustand  $x(t)$  enthält, insbesondere ob man anhand des Ausgangs verschiedene Anfangswerte unterscheiden kann.

**5.31 Definition:** Zwei Zustände  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  heißen **unterscheidbar**, falls ein  $u \in \mathcal{U}$  und ein  $t \geq 0$  existieren, so dass

$$C\varphi(t; x_1, u) \neq C\varphi(t; x_2, u).$$

Das System (31) heißt **beobachtbar**, falls alle Zustände  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_1 \neq x_2$  unterscheidbar sind.

Das folgende Lemma zeigt, dass die Beobachtbarkeit eines Systems nur von den Matrizen  $A$  und  $C$  abhängt.

**5.32 Lemma:** Zwei Zustände  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  sind genau dann unterscheidbar, wenn ein  $t \geq 0$  existiert, so dass

$$Ce^{At}(x_1 - x_2) \neq 0.$$

Das System (31) ist also genau dann beobachtbar, wenn für jedes  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$  ein  $t \geq 0$  mit  $Ce^{At}x \neq 0$  existiert.

**Beweis:** Die Unterscheidbarkeit von  $x_1$  und  $x_2$  ist äquivalent zur Existenz von  $u \in \mathcal{U}$  und  $t \geq 0$  mit

$$\begin{aligned} 0 &\neq C\varphi(t; x_1, u) - C\varphi(t; x_2, u) \\ &= C \left( e^{At}x_1 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds - e^{At}x_2 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \right) \\ &= Ce^{At}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Aussage des Lemmas. □

Also macht die folgende Definition Sinn.

**5.33 Definition:** Das Paar  $(A, C)$  heißt **beobachtbar**, falls das zugehörige System (31) beobachtbar ist. In diesem Fall nennen wir auch das Tripel  $(A, B, C)$  beobachtbar.

---

<sup>22</sup>Die Steuerung  $u(t)$  wird oft als *Eingang* des Systems bezeichnet.

Analog dazu nennen wir im Folgenden auch  $(A, B, C)$  *kontrollierbar*, falls das Paar  $(A, B)$  kontrollierbar ist.

**5.34 Definition:** Wir nennen  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  **beobachtbar**, falls ein  $t \geq 0$  mit  $C\varphi(t; x_0, 0) \neq 0$  existiert und **unbeobachtbar auf  $[0, T]$** , falls  $C\varphi(t; x_0, 0) = 0$  für alle  $t \in [0, T]$ . Wir definieren die **Menge der unbeobachtbaren Zustände auf  $[0, T]$**  durch

$$\mathcal{N}(T) := \{x_0 \in \mathbb{R}^n : C\varphi(t; x_0, 0) = 0, \forall t \in [0, T]\}$$

und die **Menge der unbeobachtbaren Zustände** durch

$$\mathcal{N} := \bigcap_{T>0} \mathcal{N}(T).$$

**5.35 Bemerkung:** Aus der Definition folgt unmittelbar, dass  $x_0 = 0$  für alle linearen Systeme nicht beobachtbar ist. Aus Lemma 5.32 folgt, dass (31) beobachtbar ist genau dann, wenn  $\mathcal{N} = \{0\}$ .

**5.36 Lemma:** Für alle  $T > 0$  gilt

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(T) = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k).$$

Insbesondere ist  $\mathcal{N}$  also ein  $A$ -invarianter Untervektorraum.

**Beweis:** Ein Zustand  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  liegt genau dann in  $\mathcal{N}(T)$ , falls

$$0 = Ce^{At}x_0 \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (32)$$

Sei nun  $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k)$ . Dann gilt  $CA^k x_0 = 0$  für  $0 \leq k < n$ . Mit Hilfe des Satzes von Caley-Hamilton folgt daraus, dass  $CA^k x_0 = 0$  für alle  $k \geq 0$ , also

$$Ce^{At}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k CA^k x_0 = 0, \quad \forall t \geq 0,$$

und folglich  $x_0 \in \mathcal{N}(T)$ .

Nun sei umgekehrt  $x_0 \in \mathcal{N}(T)$ . Durch sukzessives Ableiten von (32) nach  $t$  bei  $t = 0$  ergibt sich

$$0 = CA^k x_0, \quad \forall k \geq 0,$$

also  $x_0 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k)$ .

Schließlich zeigen wir noch, dass  $\mathcal{N}$   $A$ -invariant ist: Sei  $x \in \mathcal{N}$ , also  $CA^k x = 0$  für  $k = 0, \dots, n-1$ . Dann folgt  $CA^k(Ax) = CA^{k+1}x = 0$  für  $k = 0, \dots, n-2$  und, nach dem Satz von Caley-Hamilton,

$$CA^{n-1}(Ax) = CA^n x = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k CA^k x = 0.$$

Also ist auch  $Ax \in \mathcal{N}$ . □

Offenbar gibt es hier eine gewisse Ähnlichkeit mit der Kontrollierbarkeit. Mit Hilfe der folgenden Definition werden wir zeigen, dass sich hierbei nicht nur um eine oberflächliche Ähnlichkeit handelt.

**5.37 Definition:** Zu einem durch Matrizen  $(A, B, C)$  gegebenen Kontrollsystem (31) definieren wir das **duale System** durch die Matrizen  $(A^T, C^T, B^T)$ , also

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A^T x(t) + C^T u(t) \\ y(t) &= B^T x(t).\end{aligned}\tag{33}$$

Man beachte, dass sich beim dualen System die Dimensionen  $m$  und  $p$  der Kontrolle und des Ausgangs vertauschen.

**5.38 Satz:** Für ein durch  $(A, B, C)$  gegebenes Kontrollsystem (31) und das zugehörige duale System (33) definiere

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &:= \langle A | \text{im } B \rangle, & \mathcal{N} &:= \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(CA^k), \\ \mathcal{R}^T &:= \langle A^T | \text{im } C^T \rangle, & \mathcal{N}^T &:= \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(B^T(A^T)^k).\end{aligned}$$

Dann gilt  $\mathcal{R}^T = \mathcal{N}^\perp$  und  $\mathcal{N}^T = \mathcal{R}^\perp$ . Insbesondere gilt:  $(A, B, C)$  ist kontrollierbar genau dann, wenn  $(A^T, C^T, B^T)$  beobachtbar ist und  $(A, B, C)$  ist beobachtbar genau dann, wenn  $(A^T, C^T, B^T)$  kontrollierbar ist.

**Beweis:** Betrachte die Matrix

$$O[A, C] := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}.$$

Für diese Matrix gilt mit Lemma 5.36 offenbar

$$\mathcal{N} = \ker O[A, C].$$

Andererseits gilt

$$O[A, C]^T = [C^T | A^T C^T | \dots | (A^T)^{n-1} C^T] = R[A^T, C^T].$$

Daraus folgt  $\mathcal{R}^T = \text{im } O[A, C]^T$ . Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass  $\text{im } O[A, C]^T = (\ker O[A, C])^\perp$ . Daraus folgt die Behauptung, denn

$$\mathcal{R}^T = \text{im } O[A, C]^T = (\ker O[A, C])^\perp = \mathcal{N}^\perp.$$

Analog kann man zeigen, dass  $\mathcal{N}^T = \mathcal{R}^\perp$ .

Nach Lemma 5.32 ist  $(A, B, C)$  beobachtbar genau dann, wenn  $\mathcal{N} = \{0\}$ , was äquivalent zu  $\mathcal{N}^\perp = \mathbb{R}^n$  ist.

Nach dem ersten Teil dieses Satzes gilt

$$\mathcal{N}^\perp = \mathcal{R}^T = \text{im } O[A, C]^T = \text{im } R[A^T, C^T].$$

Also ist  $(A, B, C)$  beobachtbar genau dann, wenn  $\text{im } R[A^T, C^T] = \mathbb{R}^n$ , was dasselbe wie die Kontrollierbarkeit von  $(A^T, B^T, C^T)$  ist.

Analog zeigt man, dass  $(A, B, C)$  beobachtbar ist genau dann, wenn  $(A^T, B^T, C^T)$  beobachtbar ist.  $\square$

**5.39 Definition:** Die Matrix

$$O[A, C] := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

heißt **Beobachtbarkeitsmatrix** des Systems (31).

Aus der oben formulierten Dualität zwischen Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit und der Kalman-Rangbedingung erhalten wir unmittelbar folgendes Korollar.

**5.40 Korollar:** Das System (31) ist genau dann beobachtbar, wenn  $\text{rg } O[A, C] = n$ .

**Beweis:** Das System (31) ist genau dann beobachtbar, wenn  $(A^T, C^T)$  kontrollierbar ist. Letzteres gilt genau dann, wenn  $\text{rg } R[A^T, C^T] = n$ . Aber  $\text{rg } O[A, C] = \text{rg } R[A^T, C^T]$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Der folgende Satz ist das Analogon zu Satz 5.14.

**5.41 Satz:** Betrachte das lineare Kontrollsystem (31) mit Ausgang. Es existiert eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT = [0, C_2],$$

mit  $A_{11} \in \mathbb{R}^{n' \times n'}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{n' \times (n-n')}$ ,  $A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-n') \times (n-n')}$ ,  $B_1 \in \mathbb{R}^{n' \times m}$ ,  $B_2 \in \mathbb{R}^{(n-n') \times m}$  und  $C_2 \in \mathbb{R}^{p \times (n-n')}$ , wobei das Paar  $(A_{22}, C_2)$  beobachtbar ist.

**Beweis:** Übungsaufgabe 1 auf Blatt 10.  $\square$

## 5.5 Asymptotische Beobachtbarkeit

Wir wollen uns nun überlegen, wie man ein System der Form (31) unter Kenntnis des Ausgangs  $y(t)$  stabilisieren kann. Die Beobachtbarkeit zusammen mit der Stabilisierbarkeit ist dafür hinreichend, aber es reicht bereits eine schwächere Eigenschaft, die wir nun definieren.

**5.42 Definition:** Das System (31) heißt **asymptotisch beobachtbar** (oder **entdeckbar**), falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t; x_0, 0) = 0 \quad \text{für alle } x_0 \in \mathcal{N}.$$

Dies bedeutet, dass Lösungen zu Anfangswerten im unbeobachtbaren Unterraum  $\mathcal{N}$  bereits gegen 0 konvergieren.

**5.43 Lemma:** Das System (31) ist genau dann asymptotisch beobachtbar, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $A_{11}$  aus Satz 5.41 negativen Realteil haben.

**Beweis:** Zunächst überlegen wir uns, dass die Eigenschaft der asymptotischen Beobachtbarkeit unter Ähnlichkeitstransformationen erhalten bleibt (Übungsaufgabe). Deshalb dürfen wir annehmen, dass das System in der Blockstruktur aus Satz 5.41 gegeben ist. Dann ist

$$\mathcal{N} = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 = \begin{bmatrix} x_0^1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_0^1 \in \mathbb{R}^{n'} \right\}.$$

Aus der Form der Matrix  $\tilde{A}$  folgt für alle  $x_0 \in \mathcal{N}$ , dass

$$\varphi(t; x_0, 0) = e^{\tilde{A}t} x_0 = \begin{bmatrix} e^{A_{11}t} x_0^1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus der asymptotischen Beobachtbarkeit folgt nun unmittelbar, dass  $e^{A_{11}t} x_0^1 \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Nach Satz 3.2 (Charakterisierung der asymptotischen Stabilität) müssen deshalb die Realteile aller Eigenwerte von  $A_{11}$  negativ sein. Die umgekehrte Richtung ist klar.  $\square$

Der folgende Satz besagt, dass die asymptotische Beobachtbarkeit die duale Eigenschaft zur Stabilisierbarkeit ist.

**5.44 Satz:**  $(A, C)$  ist genau dann asymptotisch beobachtbar, wenn  $(A^T, C^T)$  stabilisierbar ist.

**Beweis:** Verwende die Sätze 5.14 und 5.41 (Übungsaufgabe 2 auf Blatt 10).  $\square$

## 5.6 Dynamische Beobachter

Ein naheliegender Ansatz zur Stabilisierung von System (31) ist die Wahl eines Feedbacks der Form  $u(t) = Fy(t) = FCx(t)$ . Dies funktioniert aber nicht immer, selbst wenn das System kontrollierbar und beobachtbar ist (Übungsaufgabe).

Wir wollen im Folgenden eine Methode zur Stabilisierung vorstellen, die immer funktioniert, wenn Stabilisierbarkeit und asymptotische Beobachtbarkeit vorliegen. Wir gehen dabei in folgenden Schritten vor:

- (1) Finde ein stabilisierendes Feedback  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  für  $(A, B)$ .
- (2) Entwerfe einen Algorithmus, der aus den Ausgängen  $y(s)$ ,  $s \in [0, t]$  einen Schätzwert  $z(t) \approx x(t)$  ermittelt.
- (3) Verwende das Feedback  $u(t) = Fz(t)$ .

Der „Algorithmus“ in Schritt (2) besteht dabei aus einem geeignet definierten Kontrollsystem für  $z(t)$ , in dem neben der Kontrollfunktion  $u(t)$  der Ausgang  $y(t)$  eine weitere Steuerung bildet.

**5.45 Definition:** *Ein dynamischer Beobachter für (31) ist ein lineares Kontrollsystem der Form*

$$\dot{z}(t) = Jz(t) + Ly(t) + Ku(t) \quad (34)$$

mit  $J \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $K \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , so dass für alle  $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathcal{U}$  für die Lösungen  $\varphi(t; x_0, u)$  von (31) und  $\psi(t; z_0, u, y)$  von (34) mit  $y(t) = C\varphi(t; x_0, u)$  die Abschätzung

$$\|\varphi(t; x_0, u) - \psi(t; z_0, u, y)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - z_0\|$$

für geeignete Konstanten  $c, \sigma > 0$  gilt.

**5.46 Satz:** *Ein dynamischer Beobachter für (31) existiert genau dann, wenn das System asymptotisch beobachtbar ist.*

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “: Da (31) asymptotisch beobachtbar ist, ist  $(A^T, C^T)$  stabilisierbar. Wir können also ein lineares Feedback  $\hat{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  finden, so dass  $A^T + C^T \hat{F}$  asymptotisch stabil ist. Mit  $G := \hat{F}^T$  ist dann auch  $A + GC = (A^T + C^T \hat{F})^T$  asymptotisch stabil, da das charakteristische Polynom bei Transposition erhalten bleibt.

Wir wählen nun in (34)  $J := A + GC$ ,  $L := -G$  und  $K := B$ , also

$$\dot{z}(t) = (A + GC)z(t) - Gy(t) + Bu(t).$$

Mit  $x(t) := \varphi(t; x_0, u)$ ,  $z(t) := \psi(t; z_0, u, y)$  und  $e(t) := z(t) - x(t)$  folgt

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{z}(t) - \dot{x}(t) \\ &= (A + GC)z(t) - Gy(t) + Bu(t) - Ax(t) - Bu(t) \\ &= (A + GC)z(t) - GCx(t) - Ax(t) \\ &= (A + GC)(z(t) - x(t)) = (A + GC)e(t).\end{aligned}$$

Aus der asymptotischen Stabilität folgt nach Satz 3.2, dass

$$\|e(t)\| \leq ce^{-\sigma t} \|e(0)\|$$

für geeignete  $c, \sigma > 0$ , was die gewünschte Abschätzung liefert.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $x_0 \in \mathcal{N}$ , also  $y(t) = C\varphi(t; x_0, u) = 0$  für alle  $t \geq 0$ . Für  $z_0 = 0$  gilt damit  $\psi(t; z_0, 0, y) = \psi(t; 0, 0, 0) = 0$ . Damit folgt aus der Eigenschaft des asymptotischen Beobachters, dass

$$\|\varphi(t; x_0, 0)\| = \|\varphi(t; x_0, 0) - \psi(t; z_0, 0, y)\| \leq ce^{-\sigma t} \|x_0 - z_0\| = ce^{-\sigma t} \|x_0\| \rightarrow 0,$$

wenn  $t \rightarrow \infty$ . Also ist das System asymptotisch beobachtbar.  $\square$

Nun zeigen wir, dass Schritt 3 des oben beschriebenen Verfahrens funktioniert, wenn wir als Schätzwert  $z(t)$  den Zustand eines dynamischen Beobachters verwenden.

Aus den Schritten 1–3 unter Verwendung von (34) ergibt sich die Feedback-Gleichung

$$u(t) = Fz(t), \quad \dot{z}(t) = Jz(t) + Ly(t) + KFz(t). \quad (35)$$

Diese Form von Feedback nennt man auch *dynamisches Ausgangsfeedback*.

**5.47 Definition:** Ein dynamisches Ausgangsfeedback (35) löst das Stabilisierungsproblem mit Ausgang, wenn das durch Einsetzen von (35) entstehende System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + BFz(t) \\ \dot{z}(t) &= Jz(t) + LCx(t) + KFz(t)\end{aligned}$$

eine asymptotisch stabile triviale Ruhelage hat.

**5.48 Satz:** Gegeben sei das lineare Kontrollsystem (31) mit Matrizen  $A, B, C$ . Dann ist das Stabilisierungsproblem mit Ausgang genau dann lösbar, wenn  $(A, B)$  stabilisierbar und  $(A, C)$  asymptotisch beobachtbar ist. In diesem Fall ist (35) mit dem im Beweis von Satz 5.46 konstruierten dynamischen Beobachter und einem stabilisierenden Feedback  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  für  $(A, B)$  ein stabilisierendes dynamisches Feedback.

**Beweis:** „ $\Leftarrow$ “: Es sei  $(A, B)$  stabilisierbar und  $(A, C)$  asymptotisch beobachtbar. Weiter sei  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ein stabilisierendes Feedback für  $(A, B)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BF \\ LC & J + KF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & BF \\ -GC & A + GC + BF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A + GC \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

mit

$$T = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ -I_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ I_{n \times n} & I_{n \times n} \end{bmatrix}.$$

Da die Eigenwerte von  $A + BF$  nach der Wahl von  $F$  und die von  $A + GC$  nach der Wahl von  $G$  negativen Realteil haben, liegt asymptotische Stabilität vor.

„ $\Rightarrow$ “: Mit der Transformation  $T$  aus Satz 5.14 erhält man für das transformierte System die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}^1(t) &= A_{11}x^1(t) + A_{12}x^2(t) + B_1Fz(t) \\ \dot{x}^2(t) &= A_{22}x^2(t) \\ \dot{z}(t) &= Jz(t) + LCx(t) + KFz(t) \end{aligned}$$

mit  $x(t) = T[x^1(t), x^2(t)]^T$ . Wir nehmen nun an, dass  $(A, C)$  nicht stabilisierbar ist. Dann besitzt  $A_{22}$  einen Eigenwert mit nichtnegativem Realteil. Die triviale Ruhelage von  $\dot{x}^2(t) = A_{22}x^2(t)$  ist also nicht asymptotisch stabil und es gibt daher einen Anfangswert  $x_0^2$  mit  $e^{A_{22}t}x_0^2 \not\rightarrow 0$ . Wählen wir also

$$x_0 := T \begin{bmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ z_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$$

mit  $x_0^1, z_0$  beliebig, so gilt  $\varphi(t; x_0, Fz(\cdot)) \not\rightarrow 0$  für jede Wahl des dynamischen Feedbacks im Widerspruch zur Lösbarkeit des Stabilisierungsproblems. Das Paar  $(A, B)$  ist also stabilisierbar. Die asymptotische Beobachtbarkeit von  $(A, C)$  folgt wie im Beweis von Satz 5.46.  $\square$

**5.49 Beispiel:** Wir betrachten folgendes System:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Die Kalman-Matrix ist

$$R[A, B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

und hat offensichtlich vollen Rang. Also ist das System kontrollierbar und folglich auch stabilisierbar. Die Beobachtbarkeitsmatrix ist

$$O[A, C] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Da  $O[A, C]$  vollen Rang hat, ist das System beobachtbar, also insbesondere asymptotisch beobachtbar. Wir wollen nun einen dynamischen Beobachter konstruieren. Zunächst bestimmen wir ein stabilisierendes Feedback  $F$  für  $(A, B)$ . Wir machen dazu den Ansatz  $F = [f_1, f_2]$  und erhalten

$$A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_1, f_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 + f_1 & 3 + f_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist

$$\chi_{A+BF}(\lambda) = \lambda(\lambda - 3 - f_2) - (2 + f_1) = \lambda^2 + \lambda(-3 - f_2) + (-2 - f_1).$$

Wir wollen erreichen, dass die Eigenwerte beide  $-1$  sind, also  $\chi_{A+BF}(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ . Dies führt zu den Gleichungen

$$-3 - f_2 = -2 \quad \text{und} \quad -2 - f_1 = 1.$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems ist  $[f_1, f_2] = [-3, -1]$ .

Als nächstes müssen wir ein stabilisierendes Feedback  $\hat{F}$  für das Paar  $(A^T, C^T)$  finden. Mit  $\hat{F} = [\hat{f}_1, \hat{f}_2]$  gilt

$$A^T + C^T \hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\hat{f}_1, \hat{f}_2] = \begin{bmatrix} 1 + \hat{f}_1 & 1 + \hat{f}_2 \\ 1 + \hat{f}_1 & \hat{f}_2 \end{bmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi_{A^T+C^T\hat{F}}(\lambda) &= (\lambda - 1 - \hat{f}_1)(\lambda - \hat{f}_2) - (1 + \hat{f}_1)(1 + \hat{f}_2) \\ &= \lambda^2 + \lambda(-\hat{f}_1 - \hat{f}_2 - 1) + (-1 - \hat{f}_1). \end{aligned}$$

Wir geben wieder das Polynom  $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$  vor, was zu folgendem Gleichungssystem führt:

$$-\hat{f}_1 - \hat{f}_2 - 1 = -2, \quad -1 - \hat{f}_1 = 1,$$

dessen eindeutige Lösung durch  $[\hat{f}_1, \hat{f}_2] = [-2, 3]$  gegeben ist. Mit den Matrizen

$$J = A + \hat{F}^T C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad L = -\hat{F}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad K = B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

erhalten wir das asymptotisch stabile System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BFz(t) \\ \dot{z}(t) &= Jz(t) + LCx(t) + KFz(t). \end{aligned}$$

◇

## 6 Stabilisierung nichtlinearer Kontrollsysteme

In diesem Abschnitt betrachten wir nichtlineare Kontrollsysteme der Form

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (36)$$

mit einer i.A. nichtlinearen Funktion

$$f : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei  $D \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge ist. Wir nehmen an, dass die Funktion  $f$  eine  $C^1$ -Funktion ist, d.h. die partiellen Ableitungen nach den Komponenten von  $x$  und von  $u$  existieren und hängen stetig von  $(x, u)$  ab. Unter dieser Annahme lässt sich zeigen, dass für jedes  $u \in \mathcal{U} := \text{PC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$  und  $x_0 \in D$  eine lokal eindeutige Lösung  $\varphi(t; x_0, u)$  des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0$$

existiert, so wie das bei den linearen Kontrollsystemen der Fall ist (wobei dort die Lösungen auf ganz  $\mathbb{R}_+$  definiert waren).

Für eine konstante Kontrollfunktion  $u$  mit Wert  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  und ein  $x_0 \in D$  liegt eine Ruhelage vor, wenn

$$f(x_0, u_0) = 0,$$

denn in diesem Fall gilt  $\varphi(t; x_0, u) = x_0$  für alle  $t \geq 0$ .

Die *Linearisierung* von (36) in  $(x_0, u_0)$  ist das lineare Kontrollsystem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0), \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0), \quad (37)$$

wobei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Wir wollen zeigen, dass man von der Stabilisierbarkeit dieses linearen Systems auf die lokale Stabilisierbarkeit des nichtlinearen Systems bei  $(x_0, u_0)$  schließen kann.

**6.1 Definition:** Das nichtlineare Kontrollsystem (36) heißt **lokal stabilisierbar** bei  $(x_0, u_0)$ , falls eine stetig differenzierbare Funktion  $g : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\tilde{D} \subset D$  offen und  $x_0 \in \tilde{D}$  existiert, so dass  $g(x_0) = u_0$  gilt und die Ruhelage  $x_0$  des Feedback-Systems

$$\dot{x}(t) = f(x(t), g(x(t)))$$

asymptotisch stabil ist (siehe Definition 4.1).

Wenn lokale Stabilisierbarkeit vorliegt, dann können wir also die Ruhelage  $x_0$  durch ein Feedback asymptotisch stabil machen (so wie bei den linearen Systemen).

**6.2 Satz:** Das lineare System (37) sei stabilisierbar und  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sei ein zugehöriges stabilisierendes Feedback. Dann ist das nichtlineare System (36) bei  $(x_0, u_0)$  lokal stabilisierbar durch das Feedback

$$g(x) := u_0 + F(x - x_0), \quad g : D \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist die triviale Ruhelage von

$$\dot{x}(t) = (A + BF)x(t)$$

asymptotisch stabil. Wir betrachten nun das System

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_0 + F(x(t) - x_0)), \quad (38)$$

das in  $x_0$  eine Ruhelage hat. Setzen wir  $\tilde{f}(x) := f(x, g(x))$ , so ist  $\tilde{f}$  stetig differenzierbar und die Ableitung von  $\tilde{f}$  in  $x_0$  ist gegeben durch

$$D\tilde{f}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0)F = A + BF.$$

Nach dem Linearisierungssatz 4.7 für unkontrollierte Systeme ist deshalb  $x_0$  eine asymptotisch stabile Ruhelage von (38).  $\square$

**6.3 Beispiel:** Wir betrachten die Gleichung des kontrollierten invertierten Pendels:

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{g}{l} \sin \varphi(t) - c' \dot{\varphi}(t) + u(t),$$

wobei  $u(t)$  die Kraft beschreibt, die der Motor zur Zeit  $t$  auf die Pendelmasse ausübt, siehe Abschnitt 1. Wir haben dort bereits gezeigt, dass

$$u(t) = \alpha \varphi(t) + \beta \dot{\varphi}(t)$$

mit

$$\beta < c' \quad \text{und} \quad \alpha < -\frac{g}{l} \quad (39)$$

ein Feedback ist, welches das linearisierte System asymptotisch stabilisiert. Dies wollen wir mit Hilfe der uns nun zur Verfügung stehenden Theorie nochmals genauer anschauen. Zuerst führen wir die Koordinaten  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$  ein. Das so entstehende System erster Ordnung ist gegeben durch

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin x_1(t) - c' x_2(t) + u(t).$$

Die rechte Seite  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des nichtlinearen Kontrollsystems ist also gegeben durch

$$f(x_1, x_2, u) = (x_2, \frac{g}{l} \sin x_1 - c' x_2 + u).$$

Die Linearisierung in  $(0, 0)$  ist damit gegeben durch das Matrizenpaar

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -c' \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mit einem Feedback der Form

$$F = [ \alpha \quad \beta ]$$

erhalten wir

$$A + BF = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} + \alpha & -c' + \beta \end{bmatrix},$$

und wie wir bereits in Abschnitt 1 gezeigt haben, haben die Eigenwerte dieser Matrix genau dann negative Realteile, wenn die Bedingung (39) erfüllt ist. Nach Satz 6.2 ist dann  $g(x) = Fx$  ein lokal stabilisierendes Feedback für das nichtlineare System.  $\diamond$

## 7 Realisierungstheorie

Wir betrachten in diesem Abschnitt wieder lineare Kontrollsysteme, aber nicht mehr in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Stattdessen wollen wir uns die Abbildung

$$u(\cdot) \mapsto y(\cdot) \tag{40}$$

ansehen, die eine Kontrollfunktion  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  auf den zugehörigen Ausgang  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  abbildet. Dabei unterscheiden wir die folgenden beiden Fälle:

- **SISO:** Single Input, Single Output ( $m = p = 1$ )
- **MIMO:** Multiple Input, Multiple Output ( $m, p$  beliebig)

SISO-Systeme haben die Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

mit  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

Um die Abbildung (40) zu verstehen, benötigen wir die *Laplace-Transformation*, welcher der folgende Unterabschnitt gewidmet ist. Betrachten wir nämlich statt der Abbildung (40) die Abbildung, welche die Laplace-Transformierte von  $u$  auf die Laplace-Transformierte von  $y$  abbildet, so hat diese eine besonders einfache Form (Multiplikation mit einer fixen Funktion).

### 7.1 Die Laplace-Transformation

**7.1 Definition:** Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann definieren wir

$$K_f := \left\{ s \in \mathbb{C} : \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \text{ existiert und ist endlich} \right\}.$$

Die Funktion  $F : K_f \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

heißt **Laplace-Transformierte von  $f$**  und wird mit  $\mathcal{L}[f]$  bezeichnet.

**7.2 Beispiel:** Sei  $a \geq 0$  und  $h_a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch

$$h_a(t) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t \geq a, \\ 0 & \text{falls } 0 \leq t < a. \end{cases}$$

Eine solche Funktion heißt auch *Heavyside-Funktion*. Für  $c > a$  und  $s \neq 0$  gilt

$$\int_0^c e^{-st} h_a(t) dt = \int_a^c e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^c = \frac{1}{s} (e^{-sa} - e^{-sc}).$$

Falls  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , folgt dann

$$\int_0^\infty e^{-st} h_a(t) dt = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{s} (e^{-sa} - e^{-sc}) = \frac{1}{s} e^{-sa},$$

da  $e^{-sc} = e^{-\operatorname{Re}(s)c} e^{i \operatorname{Im}(s)c}$ . Also gilt

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\} \subset K_{h_a},$$

das heißt

$$\mathcal{L}[h_a] = \frac{e^{-sa}}{s}, \quad \text{insbesondere } \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

◇

**7.3 Definition:** Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ .

- (i)  $f$  heißt **stückweise stetig** (bzw. **stückweise glatt**), falls  $\operatorname{Re}(f)$  und  $\operatorname{Im}(f)$  stückweise stetig bzw. stückweise glatt sind.
- (ii)  $f$  heißt **von exponentieller Ordnung**  $\gamma$  für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , falls es eine Konstante  $M > 0$  gibt, so dass für alle  $t \geq 0$  gilt:

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}.$$

- (iii)  $f$  heißt **von exponentieller Ordnung**, falls  $f$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$  für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  ist.

**7.4 Beispiel:** Sei  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $f(t) = t^n$ . Dann gilt für  $t \geq 0$  und  $\gamma > 0$ :

$$e^{\gamma t} = 1 + \gamma t + \frac{1}{2}(\gamma t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(\gamma t)^n + \cdots \geq \frac{1}{n!}(\gamma t)^n.$$

Daraus folgt

$$|f(t)| = t^n \leq \frac{n!}{\gamma^n} e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

und damit, dass  $f$  für jedes  $\gamma > 0$  von exponentieller Ordnung ist. Wir können damit leicht folgern, dass jedes Polynom von exponentieller Ordnung  $\gamma$  ist für beliebige  $\gamma > 0$ .  $\diamond$

**7.5 Satz:** Sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig. Dann gilt:

(i) Ist  $s_0 \in \mathbb{C}$  und  $\int_0^\infty e^{-s_0 t} f(t) dt$  absolut konvergent<sup>23</sup>, so ist

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)\} \subset K_f.$$

(ii) Ist  $f$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$ , so gilt

$$\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \gamma\} \subset K_f.$$

Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$  konvergiert  $\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  sogar absolut.

**Beweis:** (i): Sei  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) \geq \operatorname{Re}(s_0)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |e^{-st} f(t)| &= |e^{-\operatorname{Re}(s)t}| \cdot |e^{-i \operatorname{Im}(s)t}| \cdot |f(t)| \\ &= |e^{-\operatorname{Re}(s)t}| \cdot |f(t)| \\ &\leq e^{-\operatorname{Re}(s_0)t} \cdot |f(t)| = |e^{-s_0 t} f(t)|. \end{aligned}$$

Nach dem Majorantenkriterium ist also  $\int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt$  konvergent.

(ii): Nach Voraussetzung existiert  $M > 0$  mit  $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$  für alle  $t \geq 0$ . Damit gilt

$$|e^{-st} f(t)| = e^{-\operatorname{Re}(s)t} \cdot |f(t)| \leq M e^{-(\operatorname{Re}(s) - \gamma)t}.$$

Aus dem Majorantenkriterium folgen die Behauptungen.  $\square$

Der nächste Satz zeigt, wie man die Laplace-Transformation umkehren kann.

**7.6 Satz:** Es sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise glatt und von exponentieller Ordnung  $\gamma$  für ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , sowie  $F = \mathcal{L}[f]$  (definiert für alle  $s$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ ). Dann gilt für jedes  $x > \gamma$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + is) e^{(x+is)t} ds = \begin{cases} \frac{f(t+) + f(t-)}{2} & \text{für } t > 0, \\ \frac{f(0+)}{2} & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Dabei ist  $f(t+)$  der rechtsseitige und  $f(t-)$  der linksseitige Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $t$ . Insbesondere gilt: Ist  $f$  auf  $(0, \infty)$  stetig, so folgt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + iy) e^{(x+iy)t} dy.$$

<sup>23</sup>Das heißt  $\int_0^\infty |e^{-s_0 t} f(t)| dt < \infty$ .

**Beweis:** Wird ausgelassen.  $\square$

Als direkte Folgerung ergibt sich der folgende Eindeutigkeitsatz:

**7.7 Korollar:** Die Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  seien stückweise glatt und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Wir bezeichnen mit  $F_1$  bzw.  $F_2$  die Laplace-Transformierte von  $f_1$  bzw.  $f_2$ . Gilt dann  $F_1(s) = F_2(s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ , so gilt in jedem Stetigkeitspunkt von  $f_1$  und  $f_2$ , dass  $f_1(t) = f_2(t)$ . Sind  $f_1$  und  $f_2$  stetig, so gilt insbesondere  $f_1 = f_2$ .

**Beweis:** Nach Satz 7.6 gilt in jedem Stetigkeitspunkt  $t > 0$  von  $f_1$  und  $f_2$ , dass

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x + is)e^{(x+is)t} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x + is)e^{(x+is)t} ds = f_2(t),$$

da in den Stetigkeitspunkten der links- und rechtsseitige Limes übereinstimmen ( $t = 0$ : analog).  $\square$

Nun wollen wir einige wichtige Eigenschaften der Laplace-Transformation beweisen. Zunächst zeigen wir, dass  $\mathcal{L}$  ein linearer Operator ist.

**7.8 Satz:** Die Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  seien stückweise stetig und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Dann gilt für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , dass

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2].$$

Genauer:  $\alpha f_1 + \beta f_2$  ist stückweise stetig und von exponentieller Ordnung  $\gamma$  und obige Identität gilt in allen Punkten  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ .

**Beweis:** Zunächst stellen wir fest, dass auch  $\alpha f_1 + \beta f_2$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung  $\gamma$  ist. Für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$  folgt dann mit den Eigenschaften des Integrals, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\ &= \alpha \mathcal{L}[f_1](s) + \beta \mathcal{L}[f_2](s). \end{aligned}$$

$\square$

Der folgende Satz liefert weitere elementare Eigenschaften der Laplace-Transformation.

**7.9 Satz:** Es sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ ,  $F = \mathcal{L}[f]$ . Dann gilt:

(i) Ist  $\delta \in \mathbb{R}$ , so gilt für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma + \delta$ , dass

$$\mathcal{L}[e^{\delta t} f(t)](s) = F(s - \delta).$$

(ii) Ist  $\delta > 0$ ,  $h_\delta$  die Heavyside-Funktion (siehe Beispiel 7.2) und  $g$  definiert durch

$$g(t) := h_\delta(t)f(t - \delta),$$

so gilt für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ , dass

$$\mathcal{L}[g](s) = e^{-\delta s} F(s).$$

(iii) Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Dann gilt für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma a$ , dass

$$\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right).$$

**7.10 Bemerkung:** Die Aussagen (i) und (ii) heißen auch *Verschiebungssätze* und (iii) heißt *Streckungssatz*.

**Beweis:** Wir beweisen nur (ii) (Rest: Übungsaufgabe 2 auf Blatt 11):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](s) &= \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = \int_\delta^\infty e^{-st} f(t - \delta) dt \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_\delta^\eta e^{-st} f(t - \delta) dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\eta - \delta} e^{-s(\tau + \delta)} f(\tau) d\tau \\ &= e^{-\delta s} \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^{\eta - \delta} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau = e^{-\delta s} F(s). \end{aligned}$$

□

Wir führen nun eine wichtige Operation für Funktionen ein, die sogenannte Faltung.

**7.11 Definition:** Seien  $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig und  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  für  $t < 0$ . Dann heißt  $f_1 * f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(t - u) f_2(u) du, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

die **Faltung** von  $f_1$  und  $f_2$ .

**7.12 Bemerkung:** Für Funktionen, die nur auf  $\mathbb{R}_+$  definiert sind, definiert man die Faltung analog, indem man die Funktionen auf  $(-\infty, 0)$  durch Null fortsetzt, also  $f_1(t) = f_2(t) := 0$  für alle  $t < 0$ .

Nun beweisen wir den wichtigen *Faltungssatz*:

**7.13 Satz:** Es sei  $f_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und  $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig. Ferner seien  $f_1, f_2$  beide von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Dann existiert  $\mathcal{L}[f_1 * f_2](s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$  und es gilt

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2](s) = \mathcal{L}[f_1](s) \cdot \mathcal{L}[f_2](s).$$

**Beweis:** Zunächst stellen wir fest, dass  $f_1 * f_2$  nach Definition stetig ist. Da  $f_1$  und  $f_2$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$  sind, gilt

$$\begin{aligned} |(f_1 * f_2)(t)| &\leq \int_0^t |f_1(t-u)| \cdot |f_2(u)| du \leq \int_0^t M_1 e^{\gamma(t-u)} M_2 e^{\gamma u} du \\ &= M_1 M_2 \int_0^t e^{\gamma t} du = M_1 M_2 e^{\gamma t} t. \end{aligned}$$

Daraus können wir unter Verwendung von Beispiel 7.4 folgern, dass  $f_1 * f_2$  für jedes  $\gamma' > \gamma$  von exponentieller Ordnung  $\gamma'$  ist. Daher existiert  $\mathcal{L}[f_1 * f_2](s)$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ . Weiter gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1 * f_2](s) &= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f_1(t-u) f_2(u) du dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f_1(t-u) f_2(u) du dt. \end{aligned}$$

Beachten wir, dass  $f_1(t-u) = 0$  für alle  $u > t$ , so folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f_1(t-u) f_2(u) du dt &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f_1(t-u) f_2(u) du dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t-u)} e^{-su} f_1(t-u) f_2(u) dt du \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f_2(u) \int_0^\infty e^{-s(t-u)} f_1(t-u) dt du \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f_2(u) \int_{-u}^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau du \\ &= \int_0^\infty e^{-su} f_2(u) \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau du \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-su} f_2(u) du \\ &= \mathcal{L}[f_1](s) \cdot \mathcal{L}[f_2](s). \end{aligned}$$

□

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Laplace-Transformation ist, dass sie Differentialoperationen in algebraische Operationen überführt.

**7.14 Satz:** *Es sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  stetig, stückweise glatt und von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Dann existiert die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}[f']$  von  $f'$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$  und ist gegeben durch<sup>24</sup>*

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

<sup>24</sup>Beachte: Obwohl  $f$  nicht notwendigerweise überall differenzierbar ist, macht es Sinn von der Laplace-Transformierten von  $f'$  zu sprechen, da isolierte Punkte, in denen eine Funktion nicht definiert ist, unter dem Integral keine Rolle spielen.

**Beweis:** Sei  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ . Mit partieller Integration erhalten wir dann für alle  $\eta > 0$ , dass

$$\begin{aligned} \int_0^\eta e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} \cdot f(t)]_{t=0}^{t=\eta} + \int_0^\eta se^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-s\eta} f(\eta) - f(0) + s \int_0^\eta e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Für  $\eta \rightarrow \infty$  gilt  $e^{-s\eta} f(\eta) \rightarrow 0$ , da

$$|e^{-s\eta} f(\eta)| \leq M e^{\eta(\gamma - \operatorname{Re}(s))} \quad \text{und} \quad \gamma - \operatorname{Re}(s) < 0.$$

Da zudem  $\int_0^\eta e^{-st} f(t) dt \rightarrow \mathcal{L}[f](s)$ , folgt die Behauptung.  $\square$

Mit vollständiger Induktion erhält man damit folgenden Satz:

**7.15 Satz:** Sei  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$   $(r-1)$ -mal stetig differenzierbar und  $f^{(r-1)}$  stückweise glatt. Ferner seien  $f, \dots, f^{(r-1)}$  von exponentieller Ordnung  $\gamma$ . Dann existiert die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}[f^{(r)}]$  von  $f^{(r)}$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \gamma$  und es gilt

$$\mathcal{L}[f^{(r)}](s) = s^r \mathcal{L}[f](s) - [s^{r-1} f(0) + s^{r-2} f'(0) + \dots + s f^{(r-2)}(0) + f^{(r-1)}(0)].$$

**7.16 Beispiel:** Sei  $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ , d.h.  $f(t) = \sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi$ . Da  $f''(t) = -\omega^2 f(t)$ , ergibt sich

$$0 = \mathcal{L}[0](s) = \mathcal{L}[f'' + \omega^2 f](s) = \mathcal{L}[f''](s) + \omega^2 \mathcal{L}[f](s).$$

Mit Satz 7.15 erhalten wir

$$\mathcal{L}[f''](s) = s^2 \mathcal{L}[f](s) - s f(0) - f'(0) = s^2 \mathcal{L}[f](s) - s \sin \varphi - \omega \cos \varphi.$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\omega^2 \mathcal{L}[f](s) = -s^2 \mathcal{L}[f](s) + s \sin \varphi + \omega \cos \varphi,$$

also

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}.$$

$\diamond$

**7.17 Beispiel:** Wir betrachten die Funktion  $f_n(t) = t^n$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  und wollen mittels vollständiger Induktion zeigen, dass

$$\mathcal{L}[f_n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{falls } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Für  $n = 0$  ist  $f_n(t) = f_0(t) \equiv 1$  und wir haben die Behauptung bereits in Beispiel 7.2 bewiesen. Unsere Induktionsannahme lautet

$$\mathcal{L}[f_n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 0$$

für ein beliebiges, aber fest gewähltes  $n \in \mathbb{N}_0$ . Da  $f'_{n+1}(t) = (n+1)f_n(t)$ , gilt

$$(n+1)\frac{n!}{s^{n+1}} = (n+1)\mathcal{L}[f_n](s) = s\mathcal{L}[f_{n+1}](s) - f_{n+1}(0) = s\mathcal{L}[f_{n+1}](s).$$

Lösen wir dies nach  $\mathcal{L}[f_{n+1}](s)$  auf, so erhalten wir

$$\mathcal{L}[f_{n+1}](s) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}},$$

womit die Aussage bewiesen ist.  $\diamond$

## 7.2 Anwendung der Laplace-Transformation auf lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y &= g(x) \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

mit gegebenen  $a_0, \dots, a_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) und stetigem  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  (oder  $\mathbb{C}$ ) von exponentieller Ordnung. Setzen wir  $a_n := 1$ , so folgt mit den Eigenschaften der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[g](s) &= \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}\right](s) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \mathcal{L}[y^{(k)}](s) \\ &= a_0 \mathcal{L}[y](s) + \sum_{k=1}^n a_k \left[ s^k \mathcal{L}[y](s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} \underbrace{y^{(j)}(0)}_{=y_j} \right] \\ &= \left( \sum_{k=0}^n a_k s^k \right) \cdot \mathcal{L}[y](s) - \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} y_j. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$p(s) := \sum_{k=0}^n a_k s^k$$

und nennen  $p$  das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung. Also gilt für die Laplace-Transformation der Lösung  $y$ :

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{p(s)} \cdot \left( \mathcal{L}[g](s) + \sum_{k=1}^n a_k \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-1-j} y_j \right).$$

Hieraus lässt sich mit Hilfe der Inversion der Laplace-Transformation (Satz 7.6) die Lösung  $y$  bestimmen!

**7.18 Beispiel:** Ist das Anfangswertproblem

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \pi$$

gegeben, so erhalten wir aus obigem Ansatz

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}[0](s) = \mathcal{L}[y'' + y](s) = \mathcal{L}[y''](s) + \mathcal{L}[y](s) \\ &= s^2 \mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0) + \mathcal{L}[y](s) = (s^2 + 1)\mathcal{L}[y](s) - (s + \pi). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s + \pi}{s^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 1} + \pi \frac{1}{s^2 + 1} = \mathcal{L}[\cos + \pi \sin](s),$$

also (mit Blick auf die Tabelle)

$$y(x) = \cos(x) + \pi \sin(x).$$

◇

### 7.3 Transferfunktionen

Nun betrachten wir ein SISO-System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t), \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \tag{41}$$

mit  $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $c \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ . Wählen wir  $x_0 = 0$  als Anfangswert, so ist der Ausgang gegeben durch

$$y(t) = c \int_0^t e^{A(t-s)} bu(s) \, ds = \int_0^t ce^{A(t-s)} bu(s) \, ds.$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation erhalten wir mittels der trivialen Fortsetzung von  $u$  auf  $\mathbb{R}$  durch  $u(t) := 0$  für alle  $t < 0$ , dass

$$y = ce^{A \cdot} b * u.$$

Setzen wir  $U := \mathcal{L}[u]$  und  $Y := \mathcal{L}[y]$  (unter der Minimalvoraussetzung, dass  $u$  von exponentieller Ordnung ist), so erhalten wir aus dem Faltungssatz für die Laplace-Transformation:

$$Y(s) = \mathcal{L}[ce^{A \cdot} b](s) \cdot U(s).$$

**7.19 Definition:** Wir nennen die Funktion  $G(s) := \mathcal{L}[ce^{A \cdot} b](s)$  die **Transferfunktion** des Systems (41).

**7.20 Satz:** Die Transferfunktion  $G(\cdot)$  ist gegeben durch

$$G(s) = c(sI - A)^{-1}b$$

und ist für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$  definiert.

**Beweis:** Nach Definition der Laplace-Transformation gilt

$$G(s) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta e^{-st} c e^{At} b \, dt = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \int_0^\eta c e^{(A-sI)t} b \, dt.$$

Sei  $\operatorname{Re}(s) > \max_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$  für ein  $s \in \mathbb{C}$ . Dann ist  $s$  kein Eigenwert von  $A$  und daher existiert  $(sI - A)^{-1}$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\eta c e^{(A-sI)t} b \, dt &= \int_0^\eta c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - sI)^k b \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c (A - sI)^k b \int_0^\eta \frac{t^k}{k!} \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c (A - sI)^k b \frac{\eta^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= c (A - sI)^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta^{k+1}}{(k+1)!} (A - sI)^{k+1} \right) b \\ &= c (A - sI)^{-1} (e^{(A-sI)\eta} - I) b. \end{aligned}$$

Da der größte Eigenwert von  $A - sI$  negativen Realteil hat, folgt mit Satz 3.2, dass

$$\|e^{(A-sI)\eta} x\| \leq M e^{-\beta\eta} \|x\|, \quad \forall \eta > 0$$

mit Konstanten  $M, \beta > 0$ . Daraus folgt  $\|e^{(A-sI)\eta}\| \rightarrow 0$  für  $\eta \rightarrow \infty$ , also

$$G(s) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} c (A - sI)^{-1} (e^{(A-sI)\eta} - I) b = -c (A - sI)^{-1} b = c (sI - A)^{-1} b,$$

womit der Satz bewiesen ist.  $\square$

Wir wollen noch einen alternativen und einfacheren Beweis präsentieren, der nur die Differentialgleichung (und nicht die Lösungsformel) verwendet. Wenn wir die Laplace-Transformation für vektorwertige Funktionen komponentenweise definieren<sup>25</sup>, erhalten wir aus Satz 7.15, dass

$$s\mathcal{L}[x](s) = \mathcal{L}[\dot{x}](s) = \mathcal{L}[Ax + bu](s) = A\mathcal{L}[x](s) + b\mathcal{L}[u](s),$$

wobei hier  $x(\cdot)$  die Lösung zum Anfangswert  $x(0) = 0$  bezeichnet. Daraus folgt

$$\mathcal{L}[x](s) = (sI - A)^{-1} b \mathcal{L}[u](s)$$

<sup>25</sup>Ist  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ , so definieren wir  $\mathcal{L}[f](s) = (\mathcal{L}[f_1](s), \dots, \mathcal{L}[f_n](s))$ .

und daher

$$\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[cx](s) = c\mathcal{L}[x](s) = c(sI - A)^{-1}b\mathcal{L}[u](s).$$

Derselbe Beweis funktioniert auch für MIMO-Systeme (Übungsaufgabe). In diesem Fall ist die Transferfunktion  $G$  matrixwertig und wir nennen sie auch *Transfermatrix*:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B.$$

**7.21 Bemerkung:** Ähnlichkeitstransformationen ändern die Transfermatrix nicht. Ist  $\tilde{A} = T^{-1}AT$ ,  $\tilde{B} = T^{-1}B$  und  $\tilde{C} = CT$ , so folgt

$$\begin{aligned}\tilde{G}(s) &= CT(sI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B \\ &= CT(T^{-1}(sI - A)T)^{-1}T^{-1}B \\ &= CTT^{-1}(sI - A)^{-1}TT^{-1}B = G(s).\end{aligned}$$

**7.22 Definition:** Sei  $G(\cdot)$  eine Transferfunktion. Die **Impulsantwort** des Systems ist die Funktion  $g$  mit

$$\mathcal{L}[g](s) = G(s).$$

**7.23 Beispiel:** Wir betrachten ein SISO-System, gegeben durch Matrizen  $(A, b, c)$  und nehmen an, dass  $(A, b)$  kontrollierbar ist. Dann erhalten wir mit Satz 5.18 ein zu  $(A, b, c)$  ähnliches System  $(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c})$  mit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

und wir nehmen zusätzlich an, dass

$$\tilde{c} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0].$$

Dann können wir das transformierte System umschreiben als

$$z^{(n)} - \alpha_n z^{(n-1)} - \cdots - \alpha_2 \dot{z} - \alpha_1 z = u(t), \quad y(t) = z(t)$$

und die Laplace-Transformation liefert

$$(s^n - \alpha_n s^{n-1} - \cdots - \alpha_1)Z(s) = U(s), \quad Y(s) = Z(s).$$

Definieren wir nun  $p(s) := s^n - \alpha_n s^{n-1} - \cdots - \alpha_1$ , so gilt

$$p(s)Y(s) = U(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{p(s)}U(s).$$

Eine Möglichkeit, um (ganz praktisch) auf die Transferfunktion zu kommen, ist es einen Eingang  $u(\cdot)$  zu suchen mit  $U(s) \equiv 1$ , denn dann gilt  $Y(s) = \frac{1}{p(s)}$ . Wir

suchen also ein  $u$  mit  $\mathcal{L}[u](s) = 1$ . Die Lösung liefert uns der *Dirac-Impuls*  $\delta$  mit der Eigenschaft  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$  für alle  $f \in C_C^\infty$ . Das ist im Rahmen der Lebesgueschen Integrationstheorie mathematisch nicht definiert, aber wir können  $\delta$  durch integrierbare Funktionen approximieren.<sup>26</sup>  $\diamond$

**7.24 Beispiel:** Gegeben seien

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} G(s) &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Dies können wir auch folgendermaßen sehen:

$$y(t) = C \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds = \dots = \int_0^t 1 \cdot u(s) ds = (1 * u)(t)$$

und  $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ .  $\diamond$

Uns interessiert, wann zu einer gegebenen Funktion  $G(\cdot)$  eine *Realisierung* dieser Funktion als Transferfunktion eines linearen Kontrollsystems existiert. Dazu erweitern wir unseren Begriff eines linearen Kontrollsystems geringfügig und betrachten nun Systeme der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Das heißt, auch der Ausgang darf direkt vom Eingang abhängen (statt nur indirekt über  $x(t)$ ). Hier ist natürlich  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Da die Einträge der Transfermatrix rationale Funktionen in  $s$  sind, betrachten wir den Funktionenraum

$$\mathbb{R}^{p \times m}(s) := \{p \times m\text{-Matrizen, deren Einträge rationale Funktionen in } s \text{ sind}\}.$$

**7.25 Definition:** Das 4-Tupel  $(A, B, C, D)$  heißt **Realisierung** von  $G \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ , falls  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ .

Unser Ziel ist die Konstruktion von Realisierungen. Dazu sind folgende Begriffsbildungen nützlich.

**7.26 Definition:**  $G \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  heißt **proper** (oder **eigentlich**), falls  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$  existiert und **strikt proper**, falls  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ .

<sup>26</sup>Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Delta-Distribution>.

Wir nehmen nun an, dass eine propere Funktion  $G \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$  gegeben ist und definieren

$$D := \lim_{s \rightarrow \infty} G(s).$$

Dann ist  $\tilde{G}(s) := G(s) - D$  strikt proper. Daher stellt es keine Einschränkung der Allgemeinheit dar,  $G(\cdot)$  als strikt proper anzunehmen und statt 4-Tupeln  $(A, B, C, D)$  nur Tripel  $(A, B, C)$  zu betrachten. Wir sagen also, dass  $(A, B, C)$  eine Realisierung von  $G$  ist, falls  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ .

Wir verwenden nun als Darstellung der Funktion  $G(\cdot)$  ihre Laurent-Reihe<sup>27</sup>

$$G(s) = G_0 + \frac{1}{s}G_1 + \frac{1}{s^2}G_2 + \frac{1}{s^3}G_3 + \dots$$

Die Glieder der Folge  $(G_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$  heißen *Markov-Parameter* von  $G(\cdot)$ .

**7.27 Lemma:** Sei  $G(\cdot)$  strikt proper. Dann ist  $(A, B, C)$  eine Realisierung von  $G(\cdot)$  genau dann, wenn  $G_0 = 0$  und  $G_j = CA^{j-1}B$  für alle  $j \geq 1$ .

**Beweis:** Wir entwickeln den Ausdruck  $\frac{1}{s-x}$  formal in eine Reihe wie folgt:

$$\frac{1}{s-x} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{s}} = \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{s}\right)^j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{s^j}.$$

Insbesondere gilt also

$$(sI - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s^j} A^{j-1}$$

für alle  $s \in \mathbb{C}$ , so dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert. Damit gilt mit dem Identitätssatz der Funktionentheorie die komponentenweise Übereinstimmung der beiden Reihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{s^j} G_j = G(s) \stackrel{!}{=} C(sI - A)^{-1}B = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s^j} CA^{j-1}B.$$

Daraus ergeben sich beide Beweisrichtungen. □

**7.28 Definition:** Gegeben sei eine Folge  $\mathcal{A} = (G_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Markov-Parametern. Die zugehörigen **Hankel-Matrizen der Stufe  $t$**  ( $t \in \mathbb{N}$ ) sind alle Matrizen der Form

$$H_{s,t}(\mathcal{A}) := \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdots & G_t \\ G_2 & G_3 & \cdots & G_{t+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_s & G_{s+1} & \cdots & G_{t+s-1} \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

<sup>27</sup>Im Allgemeinen haben Laurent-Reihen die Form  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$ , aber bei Transferfunktionen ist  $a_k = 0$  für alle  $k > 0$ .

Wir definieren außerdem für beliebige  $t, s \in \mathbb{N}$  die Matrizen

$$R_t[A, B] := [B|AB|A^2B|\dots|A^{t-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times tm}$$

$$O_s[A, C] := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{sp \times n}.$$

**7.29 Definition:** Ein Tripel  $(A, B, C)$  heißt **Realisierung** einer Folge  $\mathcal{A} = (G_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^{p \times m}$ , falls  $(A, B, C)$  eine Realisierung ist von

$$G(s) = \sum_{j=1}^{\infty} G_j s^{-j}.$$

Falls es eine Realisierung von  $\mathcal{A}$  gibt, so heißt  $\mathcal{A}$  **realisierbar**.

Damit ergibt sich unmittelbar der folgende Satz.

**7.30 Satz:** Das Tripel  $(A, B, C)$  ist eine Realisierung von  $\mathcal{A} = (G_j)$  genau dann, wenn

$$H_{s,t}(\mathcal{A}) = O_s[A, C]R_t[A, B], \quad \forall s, t \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Nachrechnen liefert

$$\begin{aligned} O_s[A, C]R_t[A, B] &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{s-1} \end{bmatrix} [B|AB|A^2B|\dots|A^{t-1}B] \\ &= \begin{bmatrix} CB & CAB & \dots & CA^{t-1}B \\ CAB & CA^2B & \dots & CA^tB \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ CA^{s-1}B & CA^sB & \dots & CA^{t+s-2}B \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit aus Lemma 7.27.  $\square$

**7.31 Definition:** Die Realisierung  $(A, B, C)$  heißt **kanonisch**, falls  $(A, B)$  kontrollierbar und  $(A, C)$  beobachtbar ist.

Wir zeigen nun, wie man aus einer beliebigen Realisierung  $(A, B, C) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$  eine kanonische Realisierung konstruieren kann.

Wir nehmen zunächst an, dass  $(A, C)$  nicht beobachtbar ist. Dann ist  $(A^T, C^T)$  nach Satz 5.38 nicht kontrollierbar und wir erhalten mit Satz 5.14 eine Ähnlichkeitstransformation  $T$ , so dass

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad CT = [C_1 \quad 0], \quad T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

wobei  $(A_{11}, C_1)$  beobachtbar ist. Falls  $(A_{11}, B_1)$  nicht kontrollierbar ist, finden wir eine Transformation  $S_1$ , so dass

$$S_1^{-1}A_{11}S_1 = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad S_1^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  kontrollierbar ist. Wir definieren

$$S := \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad Q := TS.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 \\ \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ \tilde{B}_3 \end{bmatrix}, \quad CQ = [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad 0].$$

**7.32 Satz:** *Mit der obigen Zerlegung ist  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  beobachtbar und kontrollierbar und die Folgen der Markov-Parameter von  $(A, B, C)$  und  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$  stimmen überein, d.h.*

$$CA^{j-1}B = \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^{j-1} \tilde{B}_1, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:** Die Kontrollierbarkeit und Beobachtbarkeit folgt nach Konstruktion.<sup>28</sup> Um die zweite Aussage zu zeigen, betrachte die Markov-Parameter:

$$\begin{aligned} G_{j+1} &= CA^jB = (CQ)(Q^{-1}A^jQ)(Q^{-1}B) \\ &= [\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11}^j & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ \tilde{B}_3 \end{bmatrix} = \tilde{C}_1 \tilde{A}_{11}^j \tilde{B}_1. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

**7.33 Korollar:** *Falls  $\mathcal{A} = (G_j)$  realisierbar ist, hat  $\mathcal{A}$  eine kanonische Realisierung.*

**7.34 Definition:** *Die Dimension einer Realisierung  $(A, B, C)$  ist die Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .*

**7.35 Lemma:** *Ist  $(A, B, C)$  eine kanonische Realisierung von  $\mathcal{A} = (G_j)$  der Dimension  $n$ , so gilt*

$$\text{rg}H_{s,t}(\mathcal{A}) = n, \quad \forall s, t \geq n.$$

<sup>28</sup>Hier verwenden wir, dass Teilsysteme von beobachtbaren Systemen beobachtbar sind, siehe Übungsaufgabe 1 auf Blatt 13.

**Beweis:** Nach Satz 7.30 gilt  $H_{s,t}(\mathcal{A}) = O_s[A, C]R_t[A, B]$ . Da  $(A, B)$  kontrollierbar und  $(A, C)$  beobachtbar ist, gilt  $\text{im } R_t[A, B] = \mathbb{R}^n$  und  $\ker O_s[A, C] = \{0\}$ , falls  $s, t \geq n$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \text{rg}H_{s,t}(\mathcal{A}) &= \dim \text{im}(O_s[A, C]R_t[A, B]) = \dim \text{im } O_s[A, C] \\ &= n - \dim \ker O_s[A, C] = n. \end{aligned}$$

□

**7.36 Definition:** Eine Realisierung  $(A, B, C)$  von  $\mathcal{A} = (G_j)$  der Dimension  $n$  heißt **minimale Realisierung**, falls  $n \leq \tilde{n}$  für die Dimension  $\tilde{n}$  einer beliebigen Realisierung  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ .

Der folgende Satz zeigt, dass die minimalen Realisierungen genau die kanonischen Realisierungen sind und dass diese, bis auf Ähnlichkeitstransformationen, eindeutig sind.

**7.37 Satz:** Sei  $\mathcal{A} = (G_j)$  eine Folge von Markov-Parametern. Dann gilt:

- (i) Ist  $\mathcal{A}$  realisierbar, so existiert eine kanonische Realisierung.
- (ii) Eine Realisierung ist genau dann minimal, wenn sie kanonisch ist.
- (iii) Minimale Realisierungen sind ähnlich.

**Beweis:** (i) Dies ist die Aussage von Korollar 7.33.

(ii) Es sei  $(A, B, C)$  eine kanonische Realisierung mit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann ist  $\text{rg}H_{s,t}(\mathcal{A}) = n$  für alle  $s, t \geq n$  nach Lemma 7.35. Nun sei  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  eine weitere Realisierung mit  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{n} \times \tilde{n}}$ . Dann gilt

$$n = \text{rg}H_{s,t}(\mathcal{A}) = \text{rg}(O_s[\tilde{A}, \tilde{C}]R_t[\tilde{A}, \tilde{B}]) \leq \max\left\{\underbrace{\text{rg}O_s[\tilde{A}, \tilde{C}]}_{\leq \tilde{n}}, \underbrace{\text{rg}R_t[\tilde{A}, \tilde{B}]}_{\leq \tilde{n}}\right\} \leq \tilde{n}.$$

Also ist  $(A, B, C)$  eine minimale Realisierung. Umgekehrt: Sei  $(A, B, C)$  eine minimale Realisierung, die nicht kanonisch ist. Nach der obigen Konstruktion einer kanonischen Realisierung aus  $(A, B, C)$  führt dies zu einem Widerspruch, da die Dimension der kanonischen Realisierung kleiner ist als die von  $(A, B, C)$ .

(iii) Seien  $(A, B, C)$  und  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$  minimale Realisierungen. Wir definieren

$$R := R[A, B], \quad \tilde{R} := R[\tilde{A}, \tilde{B}], \quad O := O[A, C], \quad \tilde{O} := O[\tilde{A}, \tilde{C}]$$

und beobachten, dass

$$OR = \tilde{O}\tilde{R} \quad \text{und} \quad OAR = \tilde{O}\tilde{A}\tilde{R}. \quad (42)$$

Begründung: Nach Satz 7.30 gilt

$$OR = O_n[A, C]R_n[A, B] = H_{n,n}(\mathcal{A}) = O_n[\tilde{A}, \tilde{C}]R_n[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{O}\tilde{R}$$

und

$$OAR = \begin{bmatrix} CAB & \cdots & CA^n B \\ \vdots & & \vdots \\ CA^n B & \cdots & CA^{2n-1} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 & \cdots & G_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{n+1} & \cdots & G_{2n} \end{bmatrix} = \tilde{O}\tilde{A}\tilde{R}.$$

Da die Matrizen  $O, \tilde{O}, R, \tilde{R}$  vollen Rang haben, können wir einseitige Inversen  $O^\#, \tilde{O}^\#, R^\#, \tilde{R}^\#$  wählen, so dass

$$O^\#O = RR^\# = \tilde{O}^\#\tilde{O} = \tilde{R}\tilde{R}^\# = I \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (43)$$

Definiere nun  $T := R\tilde{R}^\# = (\tilde{O}^\#O)^{-1}$ . Begründung für die Gleichheit: Aus (42) und (43) folgt

$$\tilde{O}^\#OR\tilde{R}^\# = \tilde{O}^\#\tilde{O}\tilde{R}\tilde{R}^\# = I^2 = I.$$

Weiter gilt mit (42), dass

$$T^{-1}AT = (R\tilde{R}^\#)^{-1}AR\tilde{R}^\# = \tilde{O}^\#OAR\tilde{R}^\# = \tilde{O}^\#\tilde{O}\tilde{A}\tilde{R}\tilde{R}^\# = I\tilde{A}I = \tilde{A}.$$

Aus Satz 7.30 mit  $s = n$  und  $t = 1$  folgt weiter

$$\begin{aligned} T^{-1}B &= \tilde{O}^\#OR_1[A, B] = \tilde{O}^\#O_n[A, C]R_1[A, B] = \tilde{O}^\#H_{n,1}(\mathcal{A}) \\ &= \tilde{O}^\#O_n[\tilde{A}, \tilde{C}]R_1[\tilde{A}, \tilde{B}] = \tilde{O}^\#\tilde{O}\tilde{B} = \tilde{B}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} CT &= CR\tilde{R}^\# = O_1[A, C]R_n[A, B]\tilde{R}^\# = H_{1,n}(\mathcal{A})\tilde{R}^\# \\ &= O_1[\tilde{A}, \tilde{C}]R_n[\tilde{A}, \tilde{B}]\tilde{R}^\# = \tilde{C}\tilde{R}\tilde{R}^\# = \tilde{C}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

Sei  $\mathcal{A} = (G_j)$ . Dann ist die *Hankel-Matrix* von  $\mathcal{A}$  gegeben durch

$$H(\mathcal{A}) := \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & G_3 & \cdots \\ G_2 & G_3 & G_4 & \cdots \\ G_3 & G_4 & G_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Der *Rang* dieser (unendlich großen) Matrix ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Spalten (als Elemente des Folgenraums  $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \mathbb{R}\}$ ). Wir definieren den **Rang von  $\mathcal{A}$**  als den Rang von  $H(\mathcal{A})$ , in Zeichen:  $\text{rg}\mathcal{A}$ . Der Rang von  $\mathcal{A}$  ist entweder eine natürliche Zahl oder  $\infty$ .

**7.38 Bemerkung:** Alternativ könnten wir den Rang von  $\mathcal{A}$  definieren als<sup>29</sup>

$$\text{rg}\mathcal{A} := \sup_{s,t \in \mathbb{N}} \text{rg}H_{s,t}(\mathcal{A}).$$

<sup>29</sup>Siehe Übungsaufgabe 2 auf Blatt 14.

**7.39 Satz:**  $\mathcal{A} = (G_j)$  mit  $G_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$  hat eine Realisierung genau dann, wenn  $\text{rg} \mathcal{A} < \infty$ . In diesem Fall ist  $n = \text{rg} \mathcal{A}$  die Dimension einer minimalen Realisierung und  $\text{rg} H_{n,n}(\mathcal{A}) = n$ .

**Beweis:** Wird ausgelassen (siehe [1, Theorem 28]). □

Unser Ziel ist es, zu einer gegebenen Folge  $\mathcal{A} = (G_j)$  oder zu einer Transferfunktion  $G(\cdot)$  eine kanonische Realisierung zu berechnen.

**7.40 Definition:**  $\mathcal{A} = (G_j)$  heißt **rekursiv**, falls  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$G_{k+n+1} = a_n G_{k+n} + \dots + a_2 G_{k+2} + a_1 G_{k+1}, \quad \forall k \geq 0.$$

In diesem Fall heißt  $n$  die **Länge der Rekursion**.

**7.41 Satz:**  $\mathcal{A} = (G_j)$  ist realisierbar genau dann, wenn  $\mathcal{A}$  rekursiv ist.

**Beweis:** Ist  $\mathcal{A}$  rekursiv, so gilt

$$H(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \dots & G_n & \sum a_i G_i & \dots \\ G_2 & G_3 & \dots & G_{n+1} & \sum a_i G_{i+1} & \dots \\ G_3 & G_4 & \dots & G_{n+2} & \sum a_i G_{i+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Also ist  $\text{rg} H(\mathcal{A}) < \infty$  und damit  $\mathcal{A}$  realisierbar nach Satz 7.39.

Ist umgekehrt  $(A, B, C)$  eine Realisierung von  $\mathcal{A}$ , so ist  $\chi_A(s) = s^n - a_n s^{n-1} - \dots - a_1$  und damit nach dem Satz von Caley-Hamilton

$$A^n = \sum_{i=1}^n a_i A^{i-1},$$

also

$$\begin{aligned} G_{k+n+1} &= CA^k A^n B = C \left( \sum_{i=1}^n a_i A^{k+i-1} \right) B \\ &= \sum_{i=1}^n a_i CA^{k+i-1} B = \sum_{i=1}^n a_i G_{k+i}. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

**7.42 Satz:** Gegeben sei eine rekursive Folge  $\mathcal{A} = (G_j)$  mit  $G_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$ , so dass

$$G_{k+n+1} = a_n G_{k+n} + \dots + a_2 G_{k+2} + a_1 G_{k+1}, \quad \forall k \geq 0.$$

Dann ist eine Realisierung von  $\mathcal{A}$  gegeben durch

$$A := \begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I_p \\ a_1 I_p & a_2 I_p & \cdots & a_n I_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times np},$$

$$B := \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times m}, \quad C := [ I_p \quad 0 \quad \cdots \quad 0 ] \in \mathbb{R}^{p \times np}.$$

Dabei ist  $I_p$  die  $p \times p$ -Einheitsmatrix. Ferner ist das Paar  $(A, C)$  beobachtbar.

**Beweis:** Um zu zeigen, dass  $(A, C)$  beobachtbar ist, berechnen wir die Beobachtbarkeitsmatrix:

$$O[A, C] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{np-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I_p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_p \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

wobei die \*-Einträge nicht relevant sind, denn wir sehen anhand der ersten  $np$  Zeilen, dass die Matrix  $O[A, C]$  vollen Rang hat.

Als nächstes zeigen wir, dass  $CA^{j-1}B = G_j$ . Wie wir anhand der Matrix  $O[A, C]$  sehen, gilt für  $j = 1, \dots, n$ , dass

$$CA^{j-1}B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \underbrace{I_p}_j & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix} = G_j.$$

Weiter gilt

$$CA^n B = CA^{n-1}AB = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_{n-1} \\ \sum a_i G_i \end{bmatrix} = \sum a_i G_i = G_{n+1}.$$

Rest: Induktion. Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

Die Realisierung aus obigem Satz heißt auch *Beobachtbarkeitsrealisierung*.

Die Folge  $\mathcal{A}^T := (G_j^T)$  erfüllt offensichtlich die gleichen Rekursionen wie  $\mathcal{A}$ . Ist  $(A^T, C^T, B^T)$  eine Beobachtbarkeitsrealisierung von  $\mathcal{A}^T$ , so ist

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_1 I_p \\ I_p & \ddots & a_2 I_p \\ & \ddots & 0 \\ & & I_p & a_n I_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [ G_1 \quad G_2 \quad \cdots \quad G_n ]$$

eine kontrollierbare Realisierung von  $\mathcal{A}$  (verwende Satz 5.38). Wir nennen diese auch *Kontrollierbarkeitsrealisierung*.

**7.43 Korollar:** Sei  $p = 1$  oder  $m = 1$  und  $\mathcal{A}$  eine rekursive Folge. Dann ist die minimale Rekursionslänge gleich dem Rang von  $\mathcal{A}$ , es existiert genau eine minimale Rekursion und deren Koeffizienten sind gerade die des charakteristischen Polynoms einer (und damit jeder) kanonischen Realisierung.

**Beweis:** Nach dem Beweis von Satz 7.41 gilt für beliebige  $p, m$ : Gibt es eine Realisierung der Dimension  $n$ , so gibt es eine Rekursion der Länge  $n$ . Umgekehrt existiert im Fall  $p = 1$  oder  $m = 1$  immer eine Realisierung, deren Dimension gleich der Länge einer Rekursion ist, nämlich die Beobachtbarkeitsrealisierung oder die Kontrollierbarkeitsrealisierung. Damit haben wir gezeigt, dass die minimale Rekursionslänge gleich der Dimension einer minimalen Realisierung ist. Nach Satz 7.39 ist die minimale Rekursionslänge damit gleich dem Rang von  $\mathcal{A}$ . Ist z.B.  $p = 1$ , so ist die Matrix  $A$  der Beobachtbarkeitsrealisierung gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und die Dimension  $n$  dieser Realisierung ist nach Satz 7.39 minimal, wenn die Rekursionslänge minimal ist. Bei der Regelungsnormalform (Satz 5.18) haben wir gesehen, dass die Einträge der letzten Zeile gerade die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von  $A$  sind. Die Eindeutigkeit der minimalen Rekursion ergibt sich aus der Äquivalenz minimaler Realisierungen.  $\square$

Wir erhalten unmittelbar das folgende Korollar.

**7.44 Korollar:** Ist  $p = 1$ , so ist die Beobachtbarkeitsrealisierung, die man aus einer minimalen Rekursion erhält, eine kanonische Realisierung. Ist  $m = 1$ , so gilt dasselbe für die Kontrollierbarkeitsrealisierung.

Für Folgen  $\mathcal{A} = (G_j)$  haben wir damit, zumindest in den Fällen  $p = 1$  und  $m = 1$ , das Problem der Konstruktion einer kanonischen Realisierung gelöst. Als nächstes wollen wir die Frage beantworten, ob man eine kanonische Realisierung

direkt an der Transferfunktion  $G(\cdot)$  ablesen kann. Dabei beschränken wir uns auf den SISO-Fall.

Sei  $\mathcal{A} = (G_j)$  eine Folge mit  $G_j \in \mathbb{R}$ . Wir ordnen der Folge  $\mathcal{A}$  die formale Laurent-Reihe

$$W_{\mathcal{A}}(s) := \sum_{j=1}^{\infty} G_j s^{-j}$$

zu. Dann können wir Folgendes zeigen.

**7.45 Satz:** Die Folge  $\mathcal{A}$  ist genau dann realisierbar, wenn  $W_{\mathcal{A}}(\cdot)$  eine rationale Funktion ist, d.h. wenn

$$W_{\mathcal{A}}(s) = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0}{s^n - a_n s^{n-1} - \dots - a_1} \quad (44)$$

mit  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $p_i, a_i \in \mathbb{R}$ . Dabei können wir stets annehmen, dass  $m = n - 1$ .

**Beweis:** Wir beobachten zunächst, dass aus der Identität

$$p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0 = (s^n - a_n s^{n-1} - \dots - a_1) \sum_{k=1}^{\infty} G_k s^{-k}$$

durch Koeffizientenvergleich folgt, dass  $p_i = 0$  für alle  $i \geq n$ . Also können wir  $m = n - 1$  annehmen.

Nach Satz 7.41 reicht es zu zeigen, dass  $W_{\mathcal{A}}(\cdot)$  genau dann rational ist, wenn  $\mathcal{A}$  rekursiv ist. Wir zeigen zuerst, dass aus der Rationalität von  $W_{\mathcal{A}}(\cdot)$  die Rekursivität von  $\mathcal{A}$  folgt. Wir nehmen also an, dass

$$p_{n-1} s^{n-1} + p_{n-2} s^{n-2} \dots + p_0 = (s^n - a_n s^{n-1} - \dots - a_1) \sum_{j=1}^{\infty} G_j s^{-j}. \quad (45)$$

Ein Koeffizientenvergleich für die negativen Exponenten liefert

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= a_n G_n + \dots + a_2 G_2 + a_1 G_1 \\ G_{n+2} &= a_n G_{n+1} + \dots + a_2 G_3 + a_1 G_2 \\ &\vdots \\ G_{n+k+1} &= a_n G_{n+k} + \dots + a_2 G_{k+2} + a_1 G_{k+1}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathcal{A}$  rekursiv. Die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  ergeben sich aus dem Koeffizientenvergleich der Exponenten von 0 bis  $n$ .

Nun sei  $\mathcal{A}$  rekursiv, d.h.  $G_{n+k+1} = a_n G_{n+k} + \dots + a_1 G_{k+1}$  für alle  $k \geq 0$ . Dann definieren wir

$$p_j := G_{n-j} - \sum_{i=1}^{n-j-1} a_{i+j+1} G_i, \quad j = 0, \dots, n-1 \quad (46)$$

und sehen durch einen Koeffizientenvergleich, dass (45) gilt:

$$\begin{aligned} p_{n-1} &\stackrel{(46)}{=} G_1 \\ p_{n-2} &\stackrel{(46)}{=} G_2 - a_n G_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen.  $\square$

Aus dem Beweis des obigen Satzes und Korollar 7.43 ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar.

**7.46 Korollar:** Sei  $m = p = 1$  und  $W_{\mathcal{A}}(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$  mit Polynomen  $p(s), q(s)$ , wobei  $q(s)$  normiert sei und minimalen Grad habe. Dann gilt

$$\deg q(s) = \operatorname{rg} \mathcal{A}$$

und  $q(s)$  ist das charakteristische Polynom von  $A$  für jede minimale Realisierung  $(A, B, C)$  von  $\mathcal{A}$ .

Nun wissen wir im Prinzip, wie wir eine kanonische Realisierung einer rationalen Transferfunktion  $G(\cdot)$  berechnen können. Dazu folgendes Beispiel:

**7.47 Beispiel:** Gegeben sei die Funktion

$$G(s) := \frac{2s^3 + 7s^2 + 8s + 5}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}.$$

Zunächst stellen wir fest, dass

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{7}{s} + \frac{8}{s^2} + \frac{5}{s}}{1 + \frac{3}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}} = 2.$$

Also ist  $G$  proper, aber nicht strikt proper. Wir zerlegen  $G(s)$  deshalb wie folgt:

$$G(s) = \frac{2s^3 + 6s^2 + 8s + 4}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} + \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$$

und betrachten ab jetzt nur noch die strikt propere Funktion

$$\tilde{G}(s) := \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}.$$

Die Nullstellen des Zählerpolynoms sind  $\pm i$  und dies sind offensichtlich keine Nullstellen des Nenners. Also hat das Nennerpolynom bereits minimalen Grad und Korollar 7.46 sagt uns, dass

$$n = 3$$

die Dimension einer kanonischen Realisierung  $(A, B, C)$  von  $\tilde{G}(\cdot)$  (und die minimale Rekursionslänge) ist und

$$q(s) := s^3 + 3s^2 + 4s + 2$$

das charakteristische Polynom von  $A$  ist. Wir können dann als kanonische Realisierung nach Korollar 7.44 die Beobachtbarkeitsrealisierung wählen. Dazu müssen wir noch die Markov-Parameter  $G_1, G_2, G_3$  bestimmen. Da

$$a_1 = -2, a_2 = -4, a_3 = -3, p_0 = 1, p_1 = 0, p_2 = 1$$

folgt aus (46), dass

$$\begin{aligned} 1 = p_0 &= G_3 - a_2 G_1 - a_3 G_2 = G_3 + 4G_1 + 3G_2, \\ 0 = p_1 &= G_2 - a_3 G_1 = G_2 + 3G_1, \\ 1 = p_2 &= G_1. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$G_1 = 1, G_2 = -3, G_3 = 6.$$

Die gesuchte Realisierung von  $G(\cdot)$  ist deshalb gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], D = 2.$$

Um uns zu überzeugen, dass wir keinen Fehler gemacht haben, rechnen wir nochmals nach:

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1}B + D &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 4 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{s^2(s+3) + 2 + 4s} [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} s(s+3) + 4 & s+3 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} [s(s+3) + 4 \ s+3 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \\ &= \frac{s^2 + 3s + 4 - 3s - 9 + 6}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} + 2 \\ &= \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} + 2 = \frac{2s^3 + 7s^2 + 8s + 5}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} = G(s). \end{aligned}$$

◇

## Literatur

- [1] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite-dimensional Systems*. 2nd edition. Texts in Applied Mathematics, 6. Springer-Verlag, New York, 1998.